Korollar 3.16 (Abel–Ruffini)

Für $n \geq 5$ ist das "allgemeine Polynom"

$$f(x) = (x - y_1) \cdots (x - y_n)$$

nicht mittels Radikalen lösbar.

Beweis: Sei

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

wobei

$$a_{n-1} = (-1)(y_1 + \cdots + y_n)$$

$$\cancel{a_{n-2} = (-1)^2 [}$$

$$a_{n-2} = \sum_{i<j}{}' \, y_i y_j$$

$$\vdots$$

$$a_0 = (-1)^n y_1 \cdots y_n$$

Und $E = k(y_1, \ldots, y_n)$

$$F = k(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

Dann ist $f \in F[x]$ und E ist ein Zerfällungskörper von f.

Wir zeigen, dass $Gal(E/F) \cong S_n$ und somit für $n \geq 5$ nicht auflösbar ist.

Zunächst wissen wir, dass der Gruppenhomomorphismus

$$Gal(E/F) \longrightarrow Sym\{y_1, \dots, y_n\} \quad (*)$$
$$\sigma \longmapsto \sigma|_{\{y_1, \dots, y_n\}}$$

injektiv ist.

Umgekehrt, sei $s \in S_n$. Wir definieren für $R \in k(y_1, \dots, y_n)$:

$$(\sigma_s R)(y_1, \dots, y_n) = R(y_{s(1)}, \dots, y_{s(n)}).$$

Dann definiert σ_s einen Automorphismus des Körpers E; ausserdem sind $a_0, \dots, a_{n-1}$ symmetrische Polynome in $y_1, \dots, y_n$ und somit $\sigma_s|_{k(a_0, \dots, a_{n-1})} = id$.

d.h. $\sigma_s \in Gal(E/F)$, und somit ist $(*)$ auch surjektiv. $\boxed{\Xi}$

Korollar 3.17 $f(x) = x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ist nicht lösbar.

Beweis: In Korollar 2.22 hatten wir bewiesen, dass die Galois Gruppe von f $\cong S_5$. $\boxtimes$.

Bemerkung 3.18 Die Nullstellen von $x^5 - 4x + 2$ bestehen aus drei reelle und zwei komplex konjugierte spezifischen algebraischen Zahlen. Der Satz von Galois besagt, dass keine dieser Nullstellen in einer radikalen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ enthalten sind.