Lösung 4

Symmetrische Gruppen und normale Körpererweiterungen

1. Sei $f \in K[X]$ ein monisches Polynom, das in K in Linearfaktoren zerfällt. Angenommen $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ fixiert jede Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass σ die Koeffizienten von f fixiert.

2. Zeigen Sie, dass S_2, S_3 und S_4 auflösbar sind.

3. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel und $L|K$ eine endliche Körpererweiterung, so dass $\deg(f)$ und $[L : K]$ koprim sind. Zeigen Sie, dass f irreduzibel in $L[X]$ ist.

4. Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|K)$ der folgenden Körpererweiterung: $L = \mathbb{F}_2(X)$, $K = \mathbb{F}_2(X^2)$.

   Lösung: Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)$, das heisst insbesondere $\sigma(X^2) = X^2$. Wir berechnen

   $$(\sigma(X) - X)^2 = \sigma(X)^2 - X^2 = \sigma(X^2) - X^2 = 0,$$

   wobei die erste Gleichheit gilt, da $\mathbb{F}_2(X)$ Charakteristik zwei hat. Daraus folgt $\sigma(X) = X$ und somit $\sigma = \mathrm{id}$, da σ durch seinen Wert auf X definiert ist, das heisst $\mathrm{Gal}(L|K) = \{\mathrm{id}\}$.

5. Sei G eine Gruppe, die auf eine Menge X mit mindestens zwei Elementen wirkt. Die Wirkung heisst *zweifach transitiv*, falls für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$ ein $g \in G$ mit $g \cdot x_1 = y_1$ und $g \cdot x_2 = y_2$ existiert. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten.

   (a) S_n wirkt zweifach transitiv auf $\{1, \dots, n\}$ für jedes $n \geqslant 2$.

   (b) A_n wirkt zweifach transitiv auf $\{1, \dots, n\}$ für jedes $n \geqslant 4$.

   Lösung:

   (a) In Algebra I, Serie 9, Aufgabe 2 haben wir gezeigt, dass die Wirkung von S_n auf $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ nur zwei Bahnen hat: $\{(i, i)\}$ und $\{(i, j) : i \neq j\}$. Dies bedeutet, dass jedes (i, j) auf jedes (i', j') für $i \neq j$ und $i' \neq j'$ durch ein Element in S_n geschickt werden kann, und somit ist die Wirkung von S_n auf $\{1, \dots, n\}$ zweifach transitiv.

   (b) Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$. Wir unterscheiden verschiedene Fälle in Abhängigkeit von der Kardinalität der Menge $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ (diese liegt zwischen 2 und 4). Wir erinnern uns, dass ein 3-Zykel ein Produkt von zwei 2-Zykeln ist, und somit ein Element von A_n.

- Angenommen $|\{x_1, x_2, y_1, y_2\}| = 2$, also $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$. Falls beide $x_i = y_i$, dann können wir $\sigma = \mathrm{id} \in A_n$ nehmen. Andernfalls ist $x_1 = y_2$ und $x_2 = y_1$. Da $n \geqslant 4$ gibt es $u, v \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ mit $u \neq v$ und das Element $\sigma = (u\ v)(x_1\ y_1) = (u\ v)(x_2\ y_2)$ liegt in A_n und erfüllt die Behauptung.
- Angenommen $|\{x_1, x_2, y_1, y_2\}| = 3$. OBdA können wir annehmen, dass $x_1 = y_1$ oder $x_1 = y_2$. Im ersten Fall wollen wir $x_1 \mapsto x_1$ und $x_2 \mapsto y_2$ schicken und wir wissen, dass $x_2 \neq y_2$. Dies erreicht man indem man $u \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{x_1, x_2, y_2\}$ wählt und $\sigma = (x_2\ y_2\ u) \in A_n$. Im zweiten Fall wollen wir $x_1 \mapsto y_1$ und $x_2 \mapsto x_1$ schicken, was wir mit $\sigma = (x_2\ x_1\ y_1) \in A_n$ erreichen.
- Angenommen $|\{x_1, x_2, y_1, y_2\}| = 4$. Dann wählen wir $\sigma = (x_1\, y_1)(x_2\, y_2) \in A_n$.

6. Sei $E|K$ eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass $E|K$ normal ist genau dann, wenn alle irreduziblen Polynome in $K[X]$, die eine Nullstelle in E haben, bereits in E in Linearfaktoren zerfallen.

   Hinweis: Angenommen E ist ein Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]$ und $p \in K[X]$ ist ein irreduzibles Polynom mit $p(\alpha) = 0$ für ein $\alpha \in E$. Betrachten Sie die Körpererweiterung $L|E$, wobei L ein Zerfällungskörper von $f \cdot p$ ist.

   Lösung: Da E eine endliche Körpererweiterung ist, wissen wir das E endlich erzeugt ist und wir können $E = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ für $\alpha_j \in E$ schreiben.

   Angenommen jedes Polynom $f \in K[X]$, das eine Nullstelle in E hat, zerfällt in E in Linearfaktoren. Dies bedeutet insbesondere, dass das Minimalpolynom $\mathrm{irr}(\alpha_j, K)$ von α_j über K in E in Linearfaktoren zerfällt, und somit auch das Polynom $g = \prod_{j=1}^{r} \mathrm{irr}(\alpha_j, k)$. Dies impliziert, dass E den Zerfällungskörper von g enthält. Andererseits enthält der Zerfällungskörper von g die Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und somit auch $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = E$. Daraus folgt, dass E gleich dem Zerfällungskörper von g ist, und damit ist $E|K$ normal.

   Angenommen, E ist der Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]$. Sei $p \in K[X]$ irreduzibel mit $p(\alpha) = 0$ für ein $\alpha \in E$. Betrachte $L|E$ den Zerfällungskörper von $f \cdot p$ über E. Sei $\beta \in L$ mit $p(\beta) = 0$. Lemma 2.15 impliziert, dass es einen Isomorphimus
   $$\varphi : K(\alpha) \to K(\beta)$$
   gibt, der die Identität von $K \to K$ erweitert mit $\varphi(\alpha) = \beta$. Betrachte nun $f \cdot p \in K(\alpha)[X]$. Dann gilt $f \cdot p = \varphi_*(f \cdot p) \in K(\beta)[X]$, da f und p Koeffizienten in K haben. Nach Proposition 2.16 können wir nun $\varphi : K(\alpha) \to K(\beta)$ zu einem Isomorphismus $\Phi : L \to L$ erweitern, da L der Zerfällungskörper von $f \cdot p$ ist. Aber $\Phi \in \mathrm{Gal}(L|K)$ und $E|K$ ist normal, und somit $\Phi(E) = E$, und damit ist $\Phi(\alpha) = \varphi(\alpha) = \beta \in E$, was zu zeigen war.