Lösung 5

Radikale Körpererweiterungen

1. Sei $f = X^3+X^2+2X+\frac{7}{27} \in \mathbb{Q}[X]$. Konstruieren Sie eine radikale Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, die einen Zerfällungskörper von f enthält.

2. Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein Polynom von Grad p prim und E ein Zerfällungskörper von f. Zeigen Sie, dass falls $\mathrm{Gal}(E|K)$ zyklisch von Ordnung p ist, dann ist f irreduzibel.

3. Bestimmen Sie für jedes der folgenden Polynome die Galoisgruppe eines Zerfällungskörpers.

   (a) $X^5 + \frac{5}{4}X^4 - \frac{5}{21} \in \mathbb{Q}[X]$

   (b) $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$

   (c) $X^{81} - t \in \mathbb{F}_3(t)[X]$

4. Sei $E|K$ ein Zerfällungskörper von $f \in K[X]$. Wir betrachten eine Körpererweiterung K' von K und einen Zerfällungskörper E' von f über K'. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(E'|K')$. Zeigen Sie, dass $\sigma(E) = E$ und, dass der resultierende Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Gal}(E'|K') \to \mathrm{Gal}(E|K), \quad \sigma \mapsto \sigma|_E$$

   injektiv ist.

   Lösung: Sei $R(f)$ die Menge der Nullstellen von f. Da E ein Zerfällungskörper von f ist, gilt $E = K(R(f)) \subset E' = K'(R(f))$, da K' eine Körpererweiterung von K ist. Ist $\sigma \in \mathrm{Gal}(E'|K')$, dann fixiert σ den Körper K. Ausserdem sendet σ Nullstellen von f auf Nullstellen von f, und damit $\sigma(E) = \sigma(K(R(f))) \subset K(R(f)) = E$. Dies zeigt, dass die Abbildung in der Aufgabenstellung definiert ist, und damit ein Homomorphismus.

   Sei nun σ ein Element im Kern dieser Abbildung. Dann fixiert $\sigma \in \mathrm{Gal}(E'|K')$ ganz $E = K(R(f))$. Da $\sigma \in \mathrm{Gal}(E'|K')$ fixiert σ auch K' per Definition. Zusammengenommen folgern wir, dass σ somit auch $K'(R(f)) = E'$ fixiert, und damit ist $\sigma = \mathrm{id}_{E'}$. Daraus folgt, dass die Abbildung injektiv ist, was zu zeigen war.

5. Seien $E|K$ und $E'|K$ Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]$. Zeigen Sie, dass falls E in einer radikalen Körpererweiterung von K enthalten ist, so ist auch E' in einer radikalen Körpererweiterung von K enthalten.

Lösung: Sei L eine radikale Körpererweiterung von K, die E enthält. Sei $L = K(u_1, \ldots, u_t)$ und p_i das Minimalpolynom von u_i über K. Setze $g = \prod_{i=1}^t p_i$. Sei F ein Zerfällungskörper von g über K. Nach Lemma 3.6 und Lemma 3.7 ist $F|K$ eine radikale Körpererweiterung (da L radikal ist, ist die Voraussetzung von Lemma 3.7 erfüllt).

Da Zerfällungskörper bis auf Isomorphie eindeutig sind, existiert ein Isomorphismus $\varphi : E \to E'$ mit $\varphi(k) = k$ für alle $k \in K$. Da $\varphi_*(g) = g$, existiert ein Isomorphismus Φ, der φ erweitert, von F in einen Zerfällungskörper F' von g, das heisst $\Phi : F \to F'$ mit $\Phi_{|E} = \varphi$, siehe Proposition II.16. Nach dem selben Argument wie oben ist F' eine radikale Körpererweiterung von K. Da Φ die Abbildung φ erweitert, ist $\Phi(E) = E'$ und somit ist $E' \subset F'$ in einer radikalen Erweiterung enthalten.

6. Zeigen Sie, dass falls E ein endlicher Körper ist und $K \subset E$ ein Unterkörper, dann ist $\mathrm{Gal}(E|K)$ zyklisch.

   Lösung: Sei $p = \mathrm{char}(E)$. Dann ist $E = \mathbb{F}_{p^n}$ und $K = \mathbb{F}_{p^m}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m|n$. Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}|\mathbb{F}_p)$ zyklisch ist. Da $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}|\mathbb{F}_{p^m})$ eine Untergruppe von $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}|\mathbb{F}_p)$ ist, ist diese auch zyklisch.