Lösung 7

$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen

Ziel der Serie ist zu zeigen, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Die Aufgaben 1 bis 3 dienen dazu, zu zeigen, dass jedes symmetrische Polynom ein Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen ist.

Definition Sei F ein Körper. Ein Polynom $f \in F[X_1, \dots, X_n]$ heisst *symmetrisch*, falls

$$f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = f(X_1, \dots, X_n) \text{ für alle } \sigma \in S_n.$$

Seien $T, X_1, \dots, X_n$ Unbestimmte. Wir betrachten

$$\prod_{i=1}^{n}(T - X_i) = T^n - s_1 T^{n-1} + s_2 T^{n-2} - \dots + (-1)^n s_n.$$

Die Koeffizienten $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ sind symmetrisch und heissen die *elementarsymmetrischen Polynome*.

1. (a) Zeigen Sie, dass die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N}^r$ eine totale Ordnung ist, die mit der Addition auf $\mathbb{N}^r$ kompatibel ist, das heisst für alle $x, y, z \in \mathbb{N}^r$ gilt $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$.

   Für $\alpha \in \mathbb{N}^r$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ sei $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_r$. Wir bezeichnen mit $\leqslant_w$ die auf $\mathbb{N}^n$ induzierte Ordnungsrelation mittels

   $$\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^{n+1}, \quad \alpha \mapsto (|\alpha|, \alpha),$$

   wobei $\mathbb{N}^{n+1}$ mit lexikographischer Ordnung versehen ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $\leqslant_w$ mit der Addition kompatibel ist.

   (c) Zeigen Sie, dass für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$ die Menge $\{\alpha \in \mathbb{N}^n : \alpha \leqslant_w \beta\}$ endlich ist.

   Von nun betrachten wir immer die Ordnung $\leqslant_w$ auf $\mathbb{N}^n$. Für $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha \in F[X_1, \dots, X_n]$ sei

   $$\deg P := \max\{\alpha \in \mathbb{N}^n : c_\alpha \neq 0\}.$$

   (d) Berechnen Sie $\deg s_1, \dots, \deg s_n$.

   Lösung:

(d) Wir bemerken, dass

$$s_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} X_{i_1} \cdots X_{i_k}.$$

Damit ist $\deg s_k = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ mit k-vielen 1en.

2. Wir betrachten die Wirkung von S_n auf $\mathbb{N}^n$ mittels Permutation der Koordinaten. Sei $S \subseteq \mathbb{N}^n$ eine endliche S_n-invariante Teilmenge und $\beta = \max S$. Zeigen Sie, dass $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ mit $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n$.

3. Zeigen Sie mittels Induktion über $\deg f$, dass jedes symmetrische Polynom $f \in F[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom in $s_1, \ldots, s_n$ mit Koeffizienten in F ist.

   Hinweis: Sei $\beta = \deg f >_w (0, \ldots, 0)$. Dann ist $f = c_\beta X^\beta + g$ mit $\deg g <_w \deg f$. Betrachten Sie $P = s_1^{\beta_1 - \beta_2} s_2^{\beta_2 - \beta_3} \cdots s_n^{\beta_n}$. Was kann man über $f - c_\beta P$ sagen?

   Lösung: Wir bemerken zuerst, dass P ein Polynom in $s_1, \ldots, s_n$ ist, da β als maximales Element von der Form $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ mit $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n$ ist (siehe Aufgabe 2). Da P das Produkt von symmetrischen Polynomen ist, deren Grade wir bereits kennen (siehe Aufgabe 1 (d)), ist

$$\deg P = \sum_{i=1}^{n-1} \deg s_i^{\beta_i - \beta_{i+1}} + \deg s_n^{\beta_n} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) = \deg f.$$

   Das Produkt

$$\begin{aligned} X_1^{\beta_1 - \beta_2} (X_1 X_2)^{\beta_2 - \beta_2} (X_1 X_2 X_3)^{\beta_3 - \beta_4} \cdots (X_1 \cdots X_{n-1})^{\beta_{n-1} - \beta_n} (X_1 \cdots X_n)^{\beta_n} \\ = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \cdots X_n^{\beta_n} \end{aligned}$$

   hat Grad β und kommt als Summand in P mit Faktor 1 vor. Daraus folgt, dass $f - c_\beta P$ einen kleineren Grad als f hat. Aus der Indunktion folgt, dass $f - c_\beta P$ ein Polynom in $s_1, \ldots, s_n$ mit Koeffizienten in F ist. Nun folgt die Aussage auch für f, da P nach Definition ein Polynom in $s_1, \ldots, s_n$ ist.

4. Zeigen Sie, dass jedes Polynom in $\mathbb{R}[X]$ mit ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle hat.

   Lösung: Zwischenwertsatz

5. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ das Polynom $X^2 - z$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat.

   Lösung: Wir schreiben $z = re^{i\theta}$ mit $r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Dann ist $\sqrt{r} e^{i\theta/2} \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von z.

6. (a) Zeigen Sie, falls jedes Polynom in $\mathbb{R}[X]$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat, so gilt dies auch für jedes Polynom in $\mathbb{C}[X]$.

Wir beweisen, dass jedes Polynom $Q \in \mathbb{R}[X]$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt indem wir eine Induktion über die höchste Potenz von 2, die $\deg Q$ dividiert, machen. Sei $\deg(Q) = 2^n d$ mit d ungerade. Falls $n = 0$ so folgt die Aussage aus Aufgabe 4. Sei also $n \geqslant 1$ und $K \,|\, \mathbb{C} \,|\, \mathbb{R}$ ein Zerfällungskörper von Q, der $\mathbb{C}$ enthält. Wir schreiben $Q(X) = \prod_{i=1}^{2^n d}(X - x_i)$ mit $x_1, \ldots, x_{2^n d} \in K$.

Für alle $h \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$y_{ij} := x_i + x_j + h x_i x_j \text{ für } i \leqslant j$$

und wir definieren

$$R(X) = \prod_{i \leqslant j}(X - y_{ij}) \in K[X].$$

(b) Zeigen Sie, dass $\deg R = 2^{n-1} D$ mit D ungerade ist.

(c) Zeigen Sie mittels dem Satz über symmetrische Polynome, dass $R \in \mathbb{R}[X]$.

Es folgt, dass für alle $h \in \mathbb{Z}$, das Polynom R eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt.

(d) Schliessen Sie daraus, dass Indizes i und j existieren mit $x_i x_j \in \mathbb{C}$ und $x_i + x_j \in \mathbb{C}$.

(e) Schliessen Sie aus Aufgabe 5, dass $x_i, x_j \in \mathbb{C}$.

Lösung:

(a) Sei $Q \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom in $\mathbb{C}$. Dann ist $\overline{Q}(X) := \overline{Q(\overline{X})}$ ein Polynom in $\mathbb{C}$ und $Q\overline{Q}$ hat nur reelle Koeffizienten (davon kann man sich überzeugen, indem man sich überlegt, dass ein Polynom durch seine Werte an endlich vielen Stellen gegeben ist und für $Q\overline{Q}$ sind diese alle reell). Nach Annahme hat $Q\overline{Q}$ eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{C}$. Ist α Nullstelle von Q so sind wir fertig. Angenommen α ist Nullstelle von $\overline{Q}$, dann ist $\overline{\alpha}$ Nullstelle von Q, da

$$Q(\overline{\alpha}) = \overline{\overline{Q(\overline{\alpha})}} = \overline{\overline{Q}(\alpha)} = \overline{0} = 0,$$

nach Definition von $\overline{Q}$.

(b) Es ist $\deg R = \frac{2^n d(2^n d+1)}{2} = 2^{n-1} d(2^n d + 1)$, und da $n \geqslant 1$ ist $2^n d$ gerade und somit $D := d(2^n d + 1)$ ungerade, da d gerade.

(c) Die Koeffizienten von R sind symmetrische Polynome in the x_i mit reellen Koeffizienten. Aufgabe 3 impliziert, dass diese als Polynome mit reellen Koeffizienten in den elementarsymmetrischen Polynomen geschrieben werden können. Daraus folgt, dass $R \in \mathbb{R}[X]$.

(d) Die Nullstellen von $R(X)$ sind genau die y_{ij}. Da es mehr ganze Zahlen als Tupel (i, j) gibt, gibt es $s \neq t \in \mathbb{Z}$ mit $x_i + x_j + s x_i x_j$ und $x_i + x_j + t x_i x_j \in \mathbb{C}$. Daraus folgt, dass $x_i x_j \in \mathbb{C}$ und dann auch $x_i + x_j \in \mathbb{C}$.

(e) Aus Aufgabe 5 folgt, dass

$$\mathbb{C} \ni (x_i+x_j) \pm \sqrt{(x_i+x_j)^2 - 4x_ix_j} = (x_i+x_j) \pm \sqrt{x_i^2 - 2x_ix_j + x_j^2} = \begin{cases} 2x_i \\ 2x_j \end{cases} ,$$

und somit x_i und $x_j \in \mathbb{C}$.