

Serie 10

Hinweis: Mit einem Stern (*) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält (d.h. es existiert eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\overline{A} = X$). Zeigen Sie, dass jeder topologische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, separabel ist.
2. Zeigen Sie, dass \mathbb{R} mit der kofiniten Topologie nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.
3. Sei $\{X_j\}_{j \in J}$ eine Familie von Hausdorffräumen. Zeigen Sie, dass dann $\prod_{j \in J} X_j$ ein Hausdorffraum ist.
4. Sei $\{X_j\}_{j \in J}$ eine Familie von topologischen Räumen und $X = \prod_{j \in J} X_j$.
 - (a) Zeigen Sie, dass X die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $\{f_j: Y \rightarrow X_j\}_{j \in J}$ eine Familie von stetigen Abbildungen, so gibt es genau eine stetige Abbildung $f: Y \rightarrow X$ mit $\pi_j \circ f = f_j$ für alle $j \in J$.
 - (b) Zeigen Sie, dass die Produkttopologie τ die grösste Topologie auf X ist, für welche die Projektionen $\pi_k: X \rightarrow X_k$, $k \in J$, alle stetig sind, d.h. ist \mathcal{O} eine Topologie von X , für die die Projektionen alle stetig sind, so gilt $\tau \subseteq \mathcal{O}$.
5. Sei $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ die Standardtopologie auf \mathbb{R} . Wir betrachten $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\}$ versehen mit der Topologie

$$\mathcal{O} = \{U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \mid 0 \notin U\} \cup \{(U \setminus \{0\}) \cup \{0_1\} \mid U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, 0 \in U\} \\ \cup \{(U \setminus \{0\}) \cup \{0_2\} \mid U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, 0 \in U\} \cup \{(U \setminus \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\} \mid U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, 0 \in U\}.$$

Intuitiv ist X die reelle Gerade, wobei der Ursprung 0 durch zwei verschiedene Punkte 0_1 und 0_2 ersetzt wurde. Zeigen Sie, dass X kein Hausdorffraum ist, aber alle anderen Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit erfüllt.

6. Sei X ein topologischer Raum, J eine Menge und $X^J = \{\varphi \mid \varphi: J \rightarrow X\}$ trage die Produkttopologie. Sei weiter $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in X^J und sei $\varphi \in X^J$. Zeigen Sie: φ ist Grenzwert der Folge $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ in X^J genau dann, wenn $\varphi(j)$ Grenzwert der Folge $(\varphi_n(j))_{n=1}^{\infty}$ ist für alle $j \in J$.
7. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ ein Homöomorphismus $f: [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ mit $f(x) = y$ existiert, d.h. scheinbare „Randpunkte“ wie z.B. die „Ecke“ $\{0\}_{n \in \mathbb{N}}$ unterscheiden sich nicht qualitativ von „inneren Punkten“ wie $\{0.5\}_{n \in \mathbb{N}}$. (*)