

Serie 13

Hinweis: Mit einem Stern (*) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Sei $Z \subseteq \mathbb{C}^*$ offen und zusammenhängend, $z_0 \in Z$ und $i: Z \rightarrow \mathbb{C}^*$ die Inklusion. Zeigen Sie, dass sich genau dann ein stetiger Logarithmus auf Z definieren lässt, wenn $i_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ die triviale Gruppe ist. Hierbei sei ein Logarithmus auf Z eine Abbildung $\log: Z \rightarrow \mathbb{C}$, welche $e^{\log(z)} = z$ für alle $z \in Z$ erfüllt.
2. Bestimmen Sie zwei Überlagerungen $p: X \rightarrow T^2$ und $p': X' \rightarrow T^2$ des Torus T^2 , sodass $p': X \rightarrow T^2$ und $p': X' \rightarrow T^2$ die gleiche (endliche) Anzahl von Blättern haben, aber sodass es keine Homöomorphismen $\phi: X \rightarrow X'$ und $\psi: T^2 \rightarrow T^2$ gibt mit $p' \circ \phi = \psi \circ p$.
3. Sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum mit endlicher Fundamentalgruppe. Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f: X \rightarrow S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.
4. Sei $\pi: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann heißt

$$\text{Deck}(\pi) = \{\varphi: Y \rightarrow Y \mid \pi \text{ ist ein Homöomorphismus, } \pi \circ \varphi = \pi\}$$

die Menge der *Decktransformationen* von π . Bestimmen Sie $\text{Deck}(\pi)$ für

- (a) die universelle Überlagerung $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, r \mapsto e^{2\pi ir}$,
- (b) die Überlagerungen $\pi_n: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$, für $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Die Menge $\text{Deck}(\pi)$ bildet mit der üblichen Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

5. Beschreiben Sie bis auf Isomorphie alle Überlagerungen $\pi: Y \rightarrow X$ von X mit wegzusammenhängendem Y , wobei
 - (a) $X = S^1$,
 - (b) $X = S^1 \times S^2$,
 - (c) $X = S^1 \vee S^2$.
6. Sei X der Hawaiische Ohrring (vgl. Vorlesung aus Woche 9). Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
 - (a) X ist nicht semilokal einfach zusammenhängend.
 - (b) Der Kegel CX über X ist semilokal einfach zusammenhängend, aber nicht lokal einfach zusammenhängend.
7. Finden Sie bis auf Isomorphie alle 2- und 3-blättrigen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ und finden Sie eine Überlagerung $\pi: Y \rightarrow S^1 \vee S^1$, sodass $\pi_1(Y)$ unendlich erzeugt ist. (*)