Serie 5

Hinweis: Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X. Zeigen Sie, dass CX wegzusammenhängend ist.

2. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ den Kegel CS^n und die Suspension ΣS^n bis auf Homöomorphie.

3. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi\colon S^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$, $x \mapsto x$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}^n \cup_\varphi \mathbb{D}^n$ homöomorph zu S^n ist.
   (b) Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X. In welchem Sinne kann man CX mit CX verkleben, sodass man ΣX bekommt?

4. (a) Sei G eine topologische Gruppe und H eine Untergruppe. Zeigen Sie: Wenn G/H zusammenhängend ist und H (mit der Unterraumtopologie) zusammenhängend ist, dann ist G zusammenhängend.
   (b) Zur Erinnerung: $O_n(\mathbb{R})$ ist für $n \in \mathbb{N}$ nicht zusammenhängend (warum?). Zeigen Sie, dass $SO_n(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zusammenhängend ist. *Hinweis:* Betrachten Sie eine Operation von $SO_n(\mathbb{R})$ auf S^{n-1}.
   (c) Ist $SO_n(\mathbb{R})$ wegzusammenhängend? ($*$)

5. Sei X ein Hausdorffraum und K eine kompakte Teilmenge von X. Zeigen Sie:
   (a) Der Quotientenraum X/K ist ein Hausdorffraum.
   (b) Sei $A \subsetneq K$ eine offene Teilmenge von X. Dann ist die durch $f([x]_A) = [x]$ definierte Abbildung $f\colon (X \setminus A)/(K \setminus A) \to X/K$ wohldefiniert und ein Homöomorphismus. Hierbei bezeichnen $[x]_A$ und $[x]$ die Äquivalenzklassen in $(X \setminus A)/(K \setminus A)$ bzw. X/K.
   (c) Die Aussage aus (b) stimmt nicht, wenn $A = K$ ist.
   (d) Angenommen, X ist kompakt. Dann ist X/K die Einpunktkompaktifizierung von $X \setminus K$. Die Einpunktkompaktifizierung wurde auf Serie 4 definiert.