

Serie 6

Hinweis: Mit einem Stern (*) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Zeigen Sie, dass $\{5\} \subset \mathbb{Q}$ ein Retrakt von \mathbb{Q} ist, aber kein Deformationsretrakt.
2. Betrachten Sie alle möglichen Topologien auf der zweielementigen Menge $\{a, b\}$. Welche dieser topologischen Räume sind kontrahierbar?
3. Zeigen Sie, dass das Möbiusband homotopieäquivalent zum Zylinder $S^1 \times [0, 1]$ ist.
4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\text{id}_{S^n}, p: S^n \rightarrow S^n$ die stetigen Abbildungen gegeben durch $\text{id}_{S^n}(v) = v$ und $p(v) = -v$.
 - (a) Zeigen Sie für $n = 1$, dass p homotop zu id_{S^n} ist.
 - (b) Zeigen Sie für alle ungeraden n , dass p homotop zu id_{S^n} ist.
5.
 - (a) Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X kontrahierbar ist genau dann, wenn für jeden wegzusammenhängenden topologischen Raum Y und jedes Paar von stetigen Funktionen $f, g: X \rightarrow Y$ gilt, dass f und g homotop sind.
 - (b) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X kontrahierbar ist genau dann, wenn für jeden topologischen Raum Y und jedes Paar stetiger Funktionen $f, g: Y \rightarrow X$ gilt, dass f und g homotop sind.
6. Seien X und Y homotopieäquivalente Räume.
 - (a) Zeigen Sie, dass X wegzusammenhängend ist genau dann, wenn Y wegzusammenhängend ist.
 - (b) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist genau dann, wenn Y zusammenhängend ist.
 - (c) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz. Bezeichne $[z]_Z$ und $[z]_W$ die Zusammenhangs- bzw. die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes z in X oder Y . Zeigen Sie, dass $[z]_Z \mapsto [f(z)]_Z$ und $[z]_W \mapsto [f(z)]_W$ Bijektionen zwischen den Zusammenhangskomponenten bzw. den Wegzusammenhangskomponenten von X und Y definieren. (*)
7. Zeigen Sie, dass $O_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ ein starker Deformationsretrakt ist. *Hinweis:* Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren.
8. Finden Sie einen kontrahierbaren topologischen Raum X und einen Punkt $x \in X$, so dass $\{x\}$ kein starker Deformationsretrakt von X ist. (*)