Serie 7

Hinweis: Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig. Aufgaben mit einem (A) kennzeichnen besonders abstrakte Aufgaben (siehe Aufgabe 6).

1. (a) (Verklebungslemma) Seien X und Y topologische Räume und sei $X = A \cup B$ eine Überdeckung von X mit abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$. Weiter seien $f\colon A \to Y$ und $g\colon B \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A \cap B$ und sei $h\colon X \to Y$ definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ g(x), & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass h eine wohldefinierte stetige Abbildung ist.
   Bemerkung: Diese Aussage lässt sich verallgemeinern für eine Überdeckung von X mit endlich vielen abgeschlossenen Mengen, aber auch für eine beliebige Überdeckung von X mit offenen Mengen.

   (b) Sei X ein topologischer Raum und seien γ_0 und γ_1 zwei Wege in X mit $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann der Weg $\gamma_0\gamma_1$ stetig ist.

   (c) Sei X ein topologischer Raum und seien $x, y, z \in X$. Seien γ_0 und γ_0' zwei Wege in X von x nach y und γ_1 und γ_1' zwei Wege in X von y nach z. Zeigen Sie, dass falls $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ und $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ rel Endpunkte gilt, so gilt auch $\gamma_0\gamma_1 \simeq \gamma_0'\gamma_1'$ rel Endpunkte.

2. Beweisen Sie das Lemma über die Funktorialität der Fundamentalgruppe aus der Vorlesung.

3. Sei $A \subseteq X$ ein Retrakt mit Retraktion $\rho\colon X \to A$ und bezeichne $i\colon A \to X$ die Inklusion. Sei $a \in A \subseteq X$.

   (a) Zeigen Sie, dass $i_*\colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ injektiv ist und $\rho_*\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ surjektiv ist.

   (b) Angenommen ρ ist ein starker Deformationsretrakt. Zeigen Sie, dass dann i_* und ρ_* zueinder inverse Gruppenisomorphismen sind.

4. (a) Seien X und Y topologische Räume und $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Finden Sie einen (kanonischen) Gruppenisomorphismus zwischen $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ und $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

   (b) Sei $X = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in X$ beliebig. Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\pi_1(X, x_0)$.

5. Sei $\mathcal{E}$ die Kategorie mit Objekten den Euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und Morphismen $\mathrm{Mor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ den glatten Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, die den Ursprung auf den Ursprung senden, mit der üblichen Verknüpfung von Funktionen. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\mathcal{F}$, die jedem $\mathbb{R}^n$ sich selbst und jedem $f \in \mathrm{Mor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das Differential $Df(0)$ von f im Ursprung zuordnet, einen kovarianter Funktor von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}$ definiert.

6. Sei $\mathcal{U}$ gegeben durch folgendes Tripel von Daten: ($*$, A)

   - $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ ist die Klasse der kleinen Kategorien, d.h.

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ ist eine Kategorie, für welche } \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \text{ eine Menge ist}\},$$

   - $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ist die Menge der kovarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$,
   - $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Mor}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ ist durch Nacheinanderausführen von Funktoren gegeben.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ eine Kategorie bildet.

7. Finden Sie eine stetige Surjektion $S^1 \to S^2$. Können Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine stetige Surjektion $S^m \to S^n$ finden? ($*$)