Serie 9

Hinweis: Mit einem Stern $(*)$ gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Seien H und K Gruppen.
   (a) Zeigen Sie: Falls alle Elemente von $H \setminus \{1\}$ und $K \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung haben, dann haben auch alle Elemente von $(H * K) \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung. Schließen Sie daraus, dass $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nicht isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist.
   (b) Gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $H * K$ nach $H \times K$?

2. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe des projektiven Raums $\mathbb{RP}^2$ (vgl. Aufgabe 4 von Serie 4).

3. Zeigen Sie (mit den universellen Eigenschaften des freien Produktes und der freien Gruppe mit zwei Erzeugern), dass F_2, die freie Gruppe mit zwei Erzeugern (vgl. Algebra 1), isomorph zu $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ist.

4. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X mit
$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

5. Benutzen Sie den Satz von Seifert und van Kampen, um die folgenden Fundamentalgruppen zu bestimmen:
   (a) $\pi_1\left(T^2\right)$, wobei T^2 den Torus bezeichnet,
   (b) $\pi_1(K)$, wobei K die Kleinsche Flasche bezeichnet.

6. Sei $g \geq 2$. Wir definieren die *geschlossene, orientierbare Fläche Σ_g vom Geschlecht g* als Quotientenraum eines Polygons wie folgt. Sei P_{4g} ein (regelmäßiges) $4g$-seitiges Polygon, dessen Seiten im Uhrzeigersinn mit 0 bis $4g-1$ nummeriert seien. Dann ist Σ_g die Fläche, die man aus P_{4g} erhält, indem man für alle $S = 0, 4, 8, \ldots, 4(g-1)$ und für alle $S = 1, 5, 9, \ldots, 4(g-1)+1$ die im Uhrzeigersinn parametrisierte Seite S mit der im Gegenuhrzeigersinn parametrisierten Seite $S+2$ identifiziert. $(*)$
   Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen die Fundamentalgruppe $\pi_1\left(\Sigma_g\right)$.

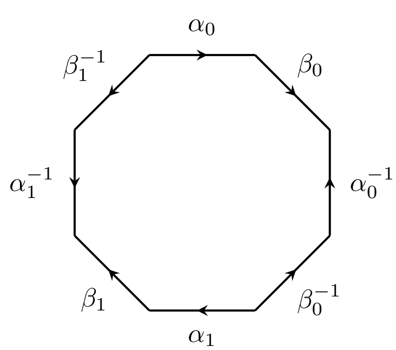

Abbildung 1: Beispiel für die Konstruktion von Σ_g durch Identifikation der Seiten eines $4g$-seitigen Polygons im Fall $g = 2$