Wahrscheinlichkeit und Statistik

Musterlösung Serie 1

1. Drücken Sie die folgenden Ereignisse mit Hilfe der Ereignisse A, B und C aus, wobei die Symbole A, B, C, $(\,)$, $\cap$, $\cup$, ^{c} verwendet werden dürfen.

D_1 = “Mindestens eines der Ereignisse A, B oder C tritt ein.„
D_2 = “Höchstens eines der Ereignisse A, B oder C tritt ein.„
D_3 = “Weder A noch B noch C tritt ein.„
D_4 = “Mindestens eines der Ereignisse A, B oder C tritt nicht ein.„
D_5 = “Genau eines der Ereignisse A, B oder C tritt ein.„
D_6 = “A kann nur dann eintreten, wenn weder B noch C eintritt.„
D_7 = “Falls A nicht eintritt, tritt B auch nicht ein.„
D_8 = “Falls D_7 eintritt, tritt auch B ein.„

Lösung:

$$
\begin{aligned}
&D_1 = A \cup B \cup C \\
&D_2 = ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))^c = (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \cap (B^c \cup C^c) \\
&D_3 = D_1^c = (A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c \\
&D_4 = (A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c \\
&D_5 = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \\
&D_6 = A^c \cup (B^c \cap C^c) = (A \cap (B \cup C))^c \\
&D_7 = (A^c \cap B)^c = A \cup B^c \\
&D_8 = (D_7 \cap B^c)^c = (A \cup B^c)^c \cup B = (A^c \cap B) \cup B = B
\end{aligned}
$$

2. Wir werfen gleichzeitig einen roten und einen grünen Würfel und betrachten die folgenden Ereignisse:

W_1 = “Keine der beiden gewürfelten Zahlen ist grösser als 2.„
W_2 = “Der rote Würfel zeigt dieselbe Zahl wie der grüne Würfel.„
W_3 = “Die Zahl auf dem roten Würfel ist das Doppelte der Zahl auf dem grünen Würfel.„
W_4 = “Die Zahl auf dem roten Würfel ist um eins grösser oder kleiner als die Zahl auf dem grünen Würfel.„
W_5 = “Wenn die Zahl auf dem roten Würfel höchstens 5 ist, zeigt der grüne Würfel eine 6.„

a) Wählen Sie einen geeigneten Grundraum Ω und identifizieren Sie die obigen Ereignisse mit Teilmengen von Ω.

b) Von welchen der obigen Ereignisse kann man entscheiden, ob sie eintreten, wenn man das Würfeln zwar beobachtet, aber farbenblind ist, so dass man rot und grün nicht unterscheiden kann?

Lösung:

a) Wir wählen als Grundraum

$$\Omega = \{(r,g) : \; r,g \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}^2$$

die Menge aller Paare der Zahlen von 1 bis 6. Die erste Komponente r steht für die Augenzahl des roten Würfels, die zweite Komponente g für die des grünen.
Bemerkung: Bei diesem Ω haben alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit $1/36$, sofern es sich um faire Würfel handelt.
Es sind

$$\begin{aligned}
W_1 &= \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\},\\
W_2 &= \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6)\}\\
&= \text{“Beide Würfel zeigen die gleiche Zahl.„}\\
W_3 &= \{(2,1),\ (4,2),\ (6,3)\}\\
W_4 &= \{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,5),\ (5,6), (2,1),\ (3,2),\ (4,3),\ (5,4),\ (6,5)\}\\
&= \text{“Die beiden gewürfelten Zahlen unterscheiden sich um 1.„}\\
W_5 &= \{(1,6),\ (2,6),\ (3,6),\ (4,6),\ (5,6), (6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}\\
&= \text{“Mindestens ein Würfel zeigt eine 6.„}
\end{aligned}$$

b) Ein Farbenblinder könnte nicht in jedem Fall entscheiden, ob das Ereignis W_3 eingetreten ist, da es in diesem Fall wichtig ist, dass man die beiden Würfel unterscheiden kann. Bei allen anderen genannten Ereignissen ist dies nicht nötig.

3. M identische Kugeln werden auf zufällige Weise in N Löcher gerollt.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in das erste Loch k_1 Kugeln, in das zweite k_2 Kugeln usw. in das N-te Loch k_N Kugeln rollen.

   b) Welche ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in eins der Löcher (gleichgültig in welches) k_1 Kugeln, in ein anderes k_2 Kugeln usw. rollen (wobei $k_1, ..., k_N$ paarweise verschieden sind)?

   c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den N Löcher l_0 solche gibt, in die keine Kugel; l_1 solche, in die genau eine Kugel usw.; l_M solche, in die alle M Kugeln rollen.

Lösung:

Wir bezeichnen mit n die Gesamtanzahl der Fälle und mit m die Anzahl der günstigen Fälle. Wir möchten also

$$\frac{m}{n}$$

bestimmen.

a) Die Gesamtanzahl der Fälle ist gleich $n = N^M$. Die Anzahl m der günstigen Fälle kann auf folgende Weise ermittelt werden: Aus M Kugeln können k_1 Kugeln auf $\binom{M}{k_1}$ Arten ausgewählt werden; aus der restlichen $M - k_1$ Kugeln können k_2 Kugeln auf $\binom{M-k_1}{k_2}$ Arten ausgewählt werden, usw.; aus $M - (k_1 + k_2 + ... + k_{N-1}) = k_N$ Kugeln können k_N Kugeln auf $\binom{k_N}{k_N} = 1$ Arten ausgewählt werden. Somit ist

$$m = \frac{M!}{k_1!(M-k_1)!} \cdot \frac{(M-k_1)!}{k_2!(M-(k_1+k_2))!} \cdot \cdots \cdot \frac{(M-(k_1+...+k_{N-2}))!}{k_{N-1}!k_N!} = \frac{M!}{k_1!k_2!\cdots k_N!}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$\frac{m}{n} = \frac{M!}{N^M \prod_{i=1}^N k_i!}.$$

b) Gegenüber der Aufgabe a) erhöht sich die Anzahl der günstigen Fälle um $N!$-mal (Anzahl der Möglichkeiten, die verschiedenen Zahlen $k_1, k_2, ..., k_N$ miteinander zu permutieren). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$\frac{m}{n} = \frac{M!N!}{N^M \prod_{i=1}^N k_i!}.$$

c) Es muss gelten

$$l_0 + l_1 + ... + l_M = N \quad \text{und} \quad 0 \cdot l_0 + 1 \cdot l_1 + ... + Ml_M = M.$$

Die Gesamtanzahl der Fälle ist gleich $n = N^M$. Um die Anzahl der günstigen Fälle zu ermitteln, muss man die Anzahl der Arten, auf die man die Löcher auswählen kann, mit der Anzahl der Arten, auf die man die Kugeln auswählen kann, multiplizieren. Die Löcher kann man auf

$$\frac{N!}{l_0!l_1!\cdots l_M!} = \frac{N!}{\prod_{k=0}^M l_k!} \tag{1}$$

Arten auswählen. Jetzt kann man auf zwei Arten vorgehen:

1. **Art:** Die Kugeln zerfallen auf Gruppen: die Anfangsgruppe (aus 0 Kugeln ist leer); die erste Gruppe besteht aus l_1 Kugeln; allgemein besteht die k-te Gruppe aus kl_k Kugeln, wobei $k = 1, ..., M$ ist. Diese Gruppen von Kugeln kann man auf

$$\frac{M!}{l_1!(2l_2)!\cdots(Ml_M)!} = \frac{M!}{\prod_{k=1}^M (kl_k)!}$$

Arten auswählen. Wir bestimmen jetzt die Anzahl der Arten, auf die man die Kugeln innerhalb der k-ten Gruppe so einteilen kann, dass in jedem der l_k Löcher k Kugeln liegen. Diese Anzahl ist gleich

$$\frac{(kl_k)!}{k!k!\cdots k!} = \frac{(kl_k)!}{(k!)^{l_k}},$$

und die Anzahl der Arten, auf die man alle Kugeln auf alle Gruppen einteilt, ist gleich dem Produkt dieser Zahlen für alle k, d.h. $\prod_{k=1}^M \frac{(kl_k)!}{(k!)^{l_k}}$. Durch Multiplikation erhalten wir die Anzahl der Arten, auf die man die Kugeln auswählen kann:

$$\frac{M!}{\prod_{k=1}^M (kl_k)!} \cdot \frac{\prod_{k=1}^M (kl_k)!}{\prod_{k=1}^M (k!)^{l_k}} = \frac{M!}{\prod_{k=1}^M (k!)^{l_k}}.$$

Durch Multiplikation mit (1) erhalten wir die Anzahl der günstigen Fälle:

$$m = \frac{N!}{\prod_{i=0}^M l_i!} \cdot \frac{M!}{\prod_{k=1}^M (k!)^{l_k}}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$\frac{m}{n} = \frac{N!M!}{N^M \prod_{i=0}^M l_i! \prod_{k=1}^M (k!)^{l_k}}. \tag{2}$$

2. **Art:** Da wir die Anzahl von Kugeln in jedes Loch gewählt haben, können wir die Antwort aus a) benutzen und $k_i = j$ setzen, wobei Loch i eines der l_j Löcher mit j Kugeln ist. Das heisst,
$$\frac{M!}{N^M \prod_{j=1}^{M} (j!)^{l_j}}.$$
Multipliziert mit (1), ergibt dies wieder (2).

4. **IPython Notebook** (auch bekannt als **Jupyter Notebook**):
Wir werden in der Vorlesung Ipython Notebook verwenden, um behandelten Begriffe zu vertiefen. Bitte machen Sie sich mit Jupyter Notebook oder mit Google Colab vertraut, wo man die Notebooks direkt laufen lassen kann.

Sie können relevante Notebooks und Materialien zur Vorlesung auf Josef Teichmann's Webseite unter folgendem Link finden.