Wahrscheinlichkeit und Statistik

Musterlösung Serie 2

1. Zeigen Sie, dass für beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

$$1_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - 1_{A_i}).$$

Leiten Sie daraus die folgende Formel her:

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}].$$

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned} 1_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} &= 1 - 1_{(A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c} = 1 - 1_{A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} 1_{A_i^c} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - 1_{A_i}). \end{aligned}$$

Somit

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] = \mathbb{E}[1_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}] = 1 - \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} (1 - 1_{A_i})],$$

und durch ausmultiplizieren erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} (1 - 1_{A_i})] &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{E}[1_{A_{i_1}} \cdot \ldots \cdot 1_{A_{i_k}}] \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}]. \end{aligned}$$

2. Beweisen Sie mit Induktion, dass für beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] &\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}[A_i \cap A_{i+1}] \\ \mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] &\geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i,j=1,\ i \neq j}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j]. \end{aligned}$$

Lösung: Für $n = 1, 2$ ist die Aussage klar. Für den Schritt von n nach $(n+1)$ hat man:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}] &= \mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] + \mathbb{P}[A_{n+1}] - \mathbb{P}[(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}] \\
&\overset{i.a.}{\leq} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}[A_i \cap A_{i+1}] - \underbrace{\mathbb{P}[(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}]}_{\geq \mathbb{P}[A_n \cap A_{n+1}]} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_{i+1}]
\end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}] &= \mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] + \mathbb{P}[A_{n+1}] - \mathbb{P}[(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}] \\
&\overset{i.a.}{\geq} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i,j=1,\ i\neq j}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] - \underbrace{\mathbb{P}[(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}]}_{= \mathbb{P}[\cup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i \cap A_{n+1}]} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i,j=1,\ i\neq j}^{n+1} \mathbb{P}[A_i \cap A_j].
\end{aligned}$$

3. Hypergeometrische Verteilung und Binomialverteilung

   a) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ falls

      i. X binomial verteilt ist:
$$P_1[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

      ii. X hypergeometrisch verteilt ist:
$$P_2[X = k] = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

   b) Bestimmen Sie $\mathrm{var}(X) \overset{def}{=} E[X^2] - (E[X])^2$ für beide Verteilungen, indem Sie zuerst $E[X(X-1)]$ berechnen.

   c) Zeigen Sie, dass $P_2[X = k] \to P_1[X = k]$ gilt, falls $N \to \infty$, $K \to \infty$ und $K/N \to p$. (Interpretation: bei einer grossen Population (N) gibt es praktisch keinen Unterschied zwischen Ziehen mit und ohne Zuüucklegen.)

Lösung:

a) Die folgenden Berechnungen verwenden wiederholt die Tatsache $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

   i. $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}}_{=1 \text{ (Summe aller W'keiten einer Bin}(n-1,p)\text{-Vert.)}} = np
\end{aligned}$$

ii. $X \sim \mathrm{Hyp}(N, K, n)$:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{\left(\frac{K}{k}\binom{K-1}{k-1}\right) \overbrace{\binom{N-K}{n-k}}^{=\binom{N-1-(K-1)}{n-1-(k-1)}}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} \\
&= n\frac{K}{N}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\binom{K-1}{j}\binom{N-1-(K-1)}{n-1-j}}{\binom{N-1}{n-1}} = n\frac{K}{N}
\end{aligned}$$

b) i. $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$:

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^2 p^{k-2}(1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= E[X^2 - X] + E[X] - E[X]^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
&= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)
\end{aligned}$$

ii. $X \sim \mathrm{Hyp}(N, K, n)$:

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\left(\frac{K(K-1)}{k(k-1)}\binom{K-2}{k-2}\right)\binom{N-K}{n-k}}{\frac{N(N-1)}{n(n-1)}\binom{N-2}{n-2}} \\
&= \frac{K(K-1)}{N(N-1)} n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{\binom{K-2}{k-2}\binom{N-2-(K-2)}{n-2-(k-2)}}{\binom{N-2}{n-2}} = \frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= E[X^2 - X] + E[X] - E[X]^2 = \frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nK}{N} - \frac{n^2K^2}{N^2} \\
&= \frac{NK(K-1)n(n-1) + nNK(N-1) - n^2K^2(N-1)}{N^2(N-1)} \\
&= \frac{NK^2n^2 - NKn^2 - NK^2n + NKn + nN^2K - nNK - n^2K^2N + n^2K^2}{N^2(N-1)} \\
&= \ldots = \frac{N-n}{N-1}\, n\, \frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} &= \frac{K!\,(N-K)!\,n!\,(N-n)!}{k!\,(K-k)!\,(n-k)!\,(N-K-(n-k))!\,N!} \\
&= \binom{n}{k}\frac{K(K-1)\cdot\ldots\cdot(K-k+1)}{N(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-k+1)} \\
&\quad \cdot \frac{(N-K)(N-K-1)\cdot\ldots\cdot(N-K-(n-k)+1)}{(N-k)(N-k-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)} \\
&= \binom{n}{k}\underbrace{\underbrace{\frac{K}{N}}_{\substack{\downarrow\\ p}}\underbrace{\frac{K-1}{N-1}}_{\substack{\downarrow\\ p}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{K-k+1}{N-k+1}}_{\substack{\downarrow\\ p}}}_{k\text{-mal}} \\
&\quad \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{N-K}{N-k}}_{\substack{\downarrow\\ 1-p}}\underbrace{\frac{N-K-1}{N-k-1}}_{\substack{\downarrow\\ 1-p}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{N-K-n+k+1}{N-n+1}}_{\substack{\downarrow\\ 1-p}}}_{(N-k)-(N-n)\text{-mal}} \\
&\to \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad (N,K\to\infty,\ K/N\to p)
\end{aligned}
$$

4. Wir betrachten ein Jasskartenspiel. (Ein Jasskartenspiel besteht aus 36 Karten, davon jeweils neun Karten von den vier Farben “Herz”, “Ecke”, “Kreuz” und “Schaufel”). Sie teilen die gut gemischten Karten an sich selbst, Ihren Vater, Ihren Bruder und einen weiteren Mitspieler aus. Jeder bekommt neun Karten.

   a) Auf wieviele Arten können Sie die Karten so austeilen?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit teilen Sie sich selbst nur Karten der Farbe “Herz” aus?
   c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre Karten alle von der gleichen Farbe sind?
   d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre Karten und die Karten Ihres Vaters jeweils alle von der gleichen Farbe sind?
   e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre Karten und die Karten Ihres Vaters jeweils alle von der gleichen Farbe sind, aber die anderen beiden Mitspieler jeweils Karten verschiedener Farben bekommen haben?

Lösung:

a) Sie erhalten neun der 36 Karten, Ihr Vater neun der restlichen 27 Karten, Ihr Bruder neun der verbleibenden 18 Karten und der vierte Mitspieler bekommt die neun übrigen Karten, d.h. es gibt

$$\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}$$

Möglichkeiten, wie die Karten verteilt werden können.

b) Der Grundraum besteht aus allen Arten, wie die Karten auf die Spieler verteilt werden können. Es ist sinnvoll anzunehmen, dass alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Wir bezeichnen mit S_i die Menge der Karten des i-ten Spielers, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\Omega = \left\{ (S_1, S_2, S_3, S_4) \;\middle|\; \begin{array}{l} S_i \subset \{\heartsuit\text{As}, \heartsuit\text{König}, \dots, \spadesuit 7, \spadesuit 6\},\ |S_i| = 9 \text{ für } i = 1,2,3,4; \\ \text{und } \bigcup_{i=1}^4 S_i = \{\heartsuit\text{As}, \heartsuit\text{König}, \dots, \spadesuit 7, \spadesuit 6\} \end{array} \right\}$$

und gemäss a) $|\Omega| = \binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}$. Das Ereignis, dass Sie sich alle "Herz" austeilen, kann durch

$$B = \left\{ (S_1, S_2, S_3, S_4) \in \Omega : \ S_1 = \{\heartsuit\text{As}, \heartsuit\text{König}, \dots, \heartsuit 7, \heartsuit 6\} \right\}$$

beschrieben werden. Es ist klar, dass $|B| = \binom{27}{9}\binom{18}{9}$ (Wenn Sie alle "Herz" haben, dann müssen nur die restlichen 27 Karten auf Ihre drei Mitspieler verteilt werden). Daher gilt

$$P[B] = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{27}{9}\binom{18}{9}}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}} = \frac{1}{\binom{36}{9}}.$$

c) Das Ereignis kann so beschrieben werden:

$$C = \left\{ (S_1, S_2, S_3, S_4) : \ S_1 \in \left\{ \{\heartsuit\text{As}, \dots, \heartsuit 6\}, \{\diamondsuit\text{As}, \dots, \diamondsuit 6\}, \{\clubsuit\text{As}, \dots, \clubsuit 6\}, \{\spadesuit\text{As}, \dots, \spadesuit 6\} \right\} \right\}$$

Daraus folgt direkt

$$P[C] = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{4 \times \binom{27}{9}\binom{18}{9}}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}} = \frac{4}{\binom{36}{9}}.$$

d) Das Ereignis kann so beschrieben werden:

$$D = \left\{ (S_1, S_2, S_3, S_4) : \ S_1, S_2 \in \left\{ \{\heartsuit\text{As}, \dots, \heartsuit 6\}, \{\diamondsuit\text{As}, \dots, \diamondsuit 6\}, \{\clubsuit\text{As}, \dots, \clubsuit 6\}, \{\spadesuit\text{As}, \dots, \spadesuit 6\} \right\} \right\}$$

Daraus folgt dann (Es git 12 Möglichkeiten, von den vier Farben jeweils einen kompletten Satz auf Sie und Ihren Vater zu verteilen, dann müssen noch die restlichen 18 Karten auf die anderen Spieler verteilt werden.)

$$P[D] = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{4 \times 3 \times \binom{18}{9}}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}} = \frac{12}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}}.$$

e) Falls ein weiterer Mitspieler nur Karten der gleichen Farbe hat, dann haben alle Spieler jeweils nur Karten der gleichen Farbe. D.h. das Ereignis kann durch $E = D \setminus D'$ beschrieben werden, wobei

$$D' = \left\{ (S_1, S_2, S_3, S_4) : \ S_1, S_2, S_3, S_4 \in \left\{ \{\heartsuit\text{As}, \dots, \heartsuit 6\}, \{\diamondsuit\text{As}, \dots, \diamondsuit 6\}, \{\clubsuit\text{As}, \dots, \clubsuit 6\}, \{\spadesuit\text{As}, \dots, \spadesuit 6\} \right\} \right\}$$

Offensichtlich ist $D' \subset D$ und daher

$$P[E] = P[D] - P[D'] = P[D] - \frac{|D'|}{|\Omega|} = P[D] - \frac{4!}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}} = \frac{12 \times \binom{18}{9} - 24}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}}.$$