# Wahrscheinlichkeit und Statistik

## Musterlösung Serie 5

1. Sei $X$ geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, d.h. $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p$, wobei $k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...,\}$. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion *(probability generating function)* ist definiert als

$$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k)$$

a) Berechnen Sie $G_X(z)$. Für welche $z \in \mathbb{R}$ ist $G_X(z)$ definiert?

b) Was ist $G_X(0)$ und $G_X(1)$?

c) Berechnen Sie $G'_X(z)|_{z=1}$. Was ist das?

Sei $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$, wobei $X_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{Geom}(p)$. Dann ist $Y \sim \mathrm{NegBin}(r,p)$.

d) Berechnen Sie $G_Y(z)$ und $\mathbb{E}[Y]$.

**Lösung:**

a) Es gilt:

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (1-p)^k p = \frac{p}{1 - z(1-p)} \quad \text{geometrische Reihe.}$$

Diese Reihe konvergiert genau dann, wenn

$$|z(1-p)| < 1,$$

d.h.

$$z \in (\frac{-1}{1-p}, \frac{1}{1-p}).$$

Aus $0 < p < 1$ folgt $\frac{1}{1-p} > 1$; insbesondere gilt, dass $G_X(1)$ and $G'_X(1)$ definiert sind.

b) Da wir wollen, dass $G_X(z)$ stetig in $z = 0$ ist, benutzen wir die Konvention $0^0 \equiv 1$. Folglich gilt $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = p$. Beachten Sie, dass im Allgemeinen gilt $G_X^{(k)}(0) = k!\mathbb{P}(X = k)$. Klarerweise gilt

$$G_X(1) = \frac{p}{1 - (1-p)} = 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k).$$

c) Es gilt, dass

$$G'_X(z) = \left( \frac{p}{1 - z(1-p)} \right)' = \frac{(1-p)p}{(1 - z(1-p))^2}.$$

Somit folgt:

$$G'_X(1) = \frac{(1-p)p}{p^2} = \frac{1-p}{p}.$$

Das Differenzieren der Reihe innerhalb des Konvergenzradius führt zu

$$G'_X(z)|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} \mathbb{P}(X = k)|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}[X].$$

d) Wir berechnen:

$$G_Y(z) = \mathbb{E}[z^Y] = \mathbb{E}[z^{X_1+\cdots+X_r}] \overset{unabh.}{=} \prod_{i=1}^{r} \mathbb{E}[z^{X_i}] \overset{i.d.\sim X}{=} (G_X(z))^r$$

und

$$\mathbb{E}[Y] = G'_Y(z)|_{z=1} = r(G_X(z))^{r-1} G'_X(z)|_{z=1} = \frac{r(1-p)}{p},$$

wobei wir Teilaufgabe c) benutzt haben. Dies stimmt natürlich überein mit

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{r} X_i] \overset{Lin.}{=} \sum_{i=1}^{r} \mathbb{E}[X_i] \overset{i.d.\sim X}{=} r\mathbb{E}[X].$$

2. Betrachten Sie die exponentielle Irrfahrt $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$, $Y_n = \exp(S_n/\sqrt{N})$ (siehe Slide 57). Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[Y_N \mid Y_n] = Y_n \left(\cosh(1/\sqrt{N})\right)^{N-n} \quad \text{für} \quad n = 0, 1, ..., N.$$

Fakultativ: Simulieren Sie eine exponentielle Irrfahrt mit $N = 100$ Zeitschritten mit einem IPython notebook und plotten Sie 10 Trajektorien.

**Lösung:** Es gilt, dass

$$\mathbb{E}[Y_N \mid Y_n] = \sum_{y_i} \mathbb{E}[Y_N \mid Y_n = y_i]\mathbf{1}_{y_i}$$

und

$$\mathbb{E}[Y_N \mid Y_n = y_i] = \sum_x x\,\mathbb{P}(Y_N = x \mid Y_n = y_i) = \sum_x x\,\frac{\mathbb{P}(Y_N = x, Y_n = y_i)}{\mathbb{P}(Y_n = y_i)}.$$

Nun berechnen wir $\mathbb{P}(Y_N = x, Y_n = y_i)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_N = x, Y_n = y_i) &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} X_j\right) = x, \exp\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = y_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(y_i \exp\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=n+1}^{N} X_j\right) = x, \exp\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = y_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(y_i \exp\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=n+1}^{N} X_j\right) = x\right) \cdot \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = y_i\right),
\end{aligned}$$

wobei wir die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $\{X_j\}_{j\geq 1}$ verwendet haben.

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_N \mid Y_n = y_i] &= \sum_x x \frac{\mathbb{P}(y_i \exp\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=n+1}^N X_j\right) = x) \cdot \mathbb{P}(\exp\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^n X_j\right) = y_i)}{\mathbb{P}(\exp\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^n X_j\right) = y_i)} \\
&= \sum_x x \, \mathbb{P} \left( y_i \exp\left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=n+1}^N X_j \right) = x \right) \\
&= \mathbb{E}\left[ y_i \exp\left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=n+1}^N X_j \right) \right] \\
&= y_i \, \mathbb{E}\left[ \prod_{j=n+1}^N e^{\frac{1}{\sqrt{N}} X_j} \right] \\
&= y_i \prod_{j=n+1}^N \mathbb{E}\left[ e^{\frac{1}{\sqrt{N}} X_j} \right],
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus der Unabhängigkeit von $\{X_j\}_{j\geq 1}$ folgt. Die Zufallsvariablen $\{X_j\}_{j\geq 1}$ nehmen die Werte $+1$ oder $-1$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Deshalb gilt, dass

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{\sqrt{N}} X_j}\right] = e^{\frac{1}{\sqrt{N}}} \, \mathbb{P}(X_j = 1) + e^{\frac{-1}{\sqrt{N}}} \, \mathbb{P}(X_j = -1) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{N}}} + e^{\frac{-1}{\sqrt{N}}}\right) = \cosh \frac{1}{\sqrt{N}}$$

und

$$\mathbb{E}[Y_N \mid Y_n = y_i] = y_i \prod_{j=n+1}^N \cosh \frac{1}{\sqrt{N}} = y_i \left( \cosh \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^{N-n}.$$

Schliesslich erhalten wir das gewünschte Ergebnis:

$$\mathbb{E}[Y_N \mid Y_n] = \sum_{y_i} \mathbb{E}[Y_N \mid Y_n = y_i] \mathbf{1}_{y_i} = \sum_{y_i} y_i \mathbf{1}_{y_i} \left( \cosh \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^{N-n} = Y_n \left( \cosh \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^{N-n}.$$

3. Es bezeichne $\mathcal{A}$ eine nicht leere Menge von Teilmengen von $\Omega$. Beweisen Sie, dass es eine eindeutige kleinste $\sigma$-Algebra existiert, die alle Teilmengen von $\mathcal{A}$ enthält.
*Bemerkung*: Diese $\sigma$-Algebra heisst die von $\mathcal{A}$ erzeugte $\sigma$-Algebra und wird häufig mit $\sigma(\mathcal{A})$ bezeichnet. "Kleinste $\sigma$-Algebra" bedeutet hier, dass jede $\sigma$-Algebra, die die Mengen von $\mathcal{A}$ enthält, auch die von $\sigma(\mathcal{A})$ enthalten muss:

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{B}$$

**Lösung:** Es bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge aller $\sigma$-Algebren, die alle Teilmengen von $\mathcal{A}$ enthält:

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{B} \,|\, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } A \in \mathcal{B} \text{ für alle } A \in \mathcal{A}\ \}$$

Der Durchschnitt $\mathcal{F} = \cap_{\mathcal{B}\in\mathcal{M}} \mathcal{B}$ von $\sigma$-Algebren ist wieder eine $\sigma$-Algebra:

- $\Omega \in \mathcal{F}$,

- falls $A \in \mathcal{F}$ ist auch $A^c \in \mathcal{F}$, und
- falls $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ ist auch die Vereinigung $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$.

Daher folgt, dass die kleinste $\sigma$-Algebra, die alle Teilmengen von $\mathcal{A}$ enthält durch

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{B}$$

gegeben ist.

4. a) Sei $I$ eine (beliebige) Menge und $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von $\sigma$-Algebren auf einem Raum $\Omega$. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine $\sigma$-Algebra ist.

   b) Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ zweier $\sigma$-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ genau dann eine $\sigma$-Algebra ist, wenn $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ oder $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$.
   *Bemerkung*: Die Aussage gilt auch für Algebren anstatt $\sigma$-Algebren. Für den Beweis sind daher nur endliche Mengenoperationen notwendig, und nicht etwa abzählbare Vereinigungen bzw. Durchschnitte.

   c) Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra. $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ entspreche dem Ereignis "im Zeitpunkt $i$ tritt das Phänomen $\Psi$ auf". Drücken Sie mit Hilfe der $A_i$ die folgenden Ereignisse als Mengen $A \in \mathcal{A}$ aus:

      1. "$\Psi$ tritt nie auf"
      2. "$\Psi$ tritt immer wieder auf"
      3. "$\Psi$ tritt schliesslich nicht mehr auf"
      4. "$\Psi$ tritt genau zweimal auf"
      5. "$\Psi$ tritt höchstens in ungeraden Zeitpunkten auf"

   Geben Sie an, welche dieser Ereignisse zur asymptotischen $\sigma$-Algebra gehören, die folgendermassen definiert ist

$$\mathcal{A}^* := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\{A_k : k \geq n\}).$$

**Lösung:**

a) i. Für alle $i \in I$ ist $\mathcal{A}_i$ eine $\sigma$-Algebra, also ist $\Omega \in \mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$, d.h. $\Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

   ii. Sei $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$, d.h. $A \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. Da jedes $\mathcal{A}_i$ eine $\sigma$-Algebra ist, ist auch $A^c \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$, d.h. $A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

   iii. Sei $A_1, A_2, \ldots \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$, d.h. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. Da jedes $\mathcal{A}_i$ eine $\sigma$-Algebra ist, ist auch $\bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$, d.h. $\bigcup_{k \geq 1} A_k \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

   Also ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine $\sigma$-Algebra.

b) $\Leftarrow$: Es ist klar, dass wenn $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, dann $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2$ und somit ist $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ eine $\sigma$-Algebra. Das Argument ist das gleiche, wenn $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$.

   $\Rightarrow$: Beachten Sie zunächst, dass für $A, B \subseteq \Omega$ gilt:

$$A \triangle B := (A \cup B) \cap (A \cap B)^c.$$

   Wenn also $A$ und $B$ zu einer $\sigma$-Algebra gehören, dann gehört auch ihre symmetrische Differenz $A \triangle B$ dazu. Falls nun $\mathcal{A}_1 \not\subseteq \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_2 \not\subseteq \mathcal{A}_1$ ist, dann gibt es $A_1 \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2$ und

$A_2 \in \mathcal{A}_2 \setminus \mathcal{A}_1$. Beachten Sie, dass $A_1 \triangle A_2 \notin \mathcal{A}_i$, denn, falls $A_1 \triangle A_2 \in \mathcal{A}_i$, dann für $i \in \{1,2\}$ gilt

$$A_i \triangle (A_1 \triangle A_2) \in \mathcal{A}_i,$$

was $A_j \in \mathcal{A}_i$ für $j \neq i$ impliziert. Damit ist $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ keine $\sigma$-Algebra, weil $A_1 \triangle A_2 \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}$, obwohl $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

c) 1. $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i^c = (\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i)^c$

2. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcup\limits_{k\geq n} A_k \right)$

3. $\left[ \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcup\limits_{k\geq n} A_k \right) \right]^c = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcup\limits_{k\geq n} A_k \right)^c = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcap\limits_{k\geq n} A_k^c \right)$

4. $\bigcup\limits_{j\neq k} \left[ (A_j \cap A_k) \bigcap\limits_{i\notin\{j,k\}} A_i^c \right]$

5. $\bigcap\limits_{k \text{ gerade}} A_k^c = \left( \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_{2k} \right)^c$

Nur die Ereignisse in 2. und 3. gehören zu $\mathcal{A}^*$. Die anderen Ereignisse hängen von z.B. $A_1, A_2, A_3$ ab.