Wahrscheinlichkeit und Statistik

Musterlösung Serie 6

1. Für $s \in (1, \infty)$ ist die **Riemann'sche Zetafunktion** gegeben durch die konvergente Reihe $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Wir wollen zeigen, dass

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - p_i^{-s}\right)}, \qquad s \in (1, \infty) \tag{1}$$

wobei $p_1, p_2, p_3, \ldots = 2, 3, 5, \ldots$ eine Durchnummerierung der Primzahlen darstellt. Sei $s \in (1, \infty)$ fix.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(N) := \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in N} \frac{1}{n^s}, \quad N \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, wobei $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ bezeichnet (i.e. $N \subseteq \mathbb{N}$).

b) Sei p eine Primzahl $N_p := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ ist teilbar durch } p\}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(N_p)$.

c) Zeigen Sie, dass die Familie von Ereignissen $(N_p)_{p \text{ prim}}$ unabhängig ist.

d) Berechnen Sie

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p \text{ prim}} N_p^c\right)$$

mit Hilfe von c) und der Stetigkeitseigenschaften von $\mathbb{P}$ (siehe Slide 148), und folgern Sie daraus (1).

Lösung:

a) Allgemein definiert jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) = 1$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ durch $\mathbb{P}(N) := \sum_{n \in N} f(n)$ $(N \subseteq \mathbb{N})$. Offensichtlich ist $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$. Für eine Folge N_i $(i \in \mathbb{N})$ von disjunkten Teilmengen von $\mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\right) = \underbrace{\sum_{n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i} f(n)}_{=:a} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in N_i} f(n)}_{=:b} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_i),$$

wobei $a = b$ aus der Tatsache folgt, dass die Mengen N_i disjunkt sind und $f(n) \geq 0$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$, aus der Analysis folgt dann (siehe auch Umordnungssatz), dass es auf die Nummerierung der Elemente nicht ankommt ($\sum_{n \in N} f(n)$ ist ja eigentlich definiert durch $\sup_{A \subseteq N \text{ endlich}} \sum_{n \in A} f(n)$). Nun setzen wir $f(n) := \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) Sei p eine Primzahl. Dann ist $N_p = \{np \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ und somit

$$\mathbb{P}(N_p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(np)^s} = \frac{1}{p^s} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}}_{=1} = \frac{1}{p^s}.$$

c) Zu zeigen ist

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} N_{p_i}\right) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(N_{p_i}) \qquad\qquad (m \in \mathbb{N}; p_1 \neq \cdots \neq p_m \text{prim}).$$

Seien also $m \in \mathbb{N}$ und $p_1, \ldots, p_m$ unterschiedliche Primzahlen, dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} N_{p_i}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{ n \prod_{i=1}^{m} p_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{\left(n \prod_{i=1}^{m} p_i\right)^s}$$
$$= \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{m} p_i\right)^s} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}}_{=1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} p_i^s} = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(N_{p_i}).$$

d) Aus der Unabhängigkeit folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} N_{p_i}^c\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_{p_i}^c) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(N_{p_i})) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - p_i^{-s}\right)$$

Die Folge $B_n := \bigcap_{i=1}^{n} N_{p_i}^c$ $(n \in \mathbb{N})$ ist eine monoton fallende Folge von Ereignissen die gegen $\bigcap_{i=1}^{\infty} N_{p_i}^c = \{1\}$ konvergiert, wobei die letzte Gleichheit aus der Tatsache folgt, dass 1 die einzige Zahl ist, die durch keine Primzahl teilbar ist. Aus der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses folgt nun

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - p_i^{-s}\right) = \mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

und somit

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - p_i^{-s}\right)}.$$

2. a) Konstruieren Sie eine Folge von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty$ und $\mathbb{P}(\cap_n \cup_{k \geq n} A_k) = 0$.

b) Sei $C \in (0, \infty)$ und $0 \leq \lambda_n \leq C$. Ferner seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ_n, d.h. $\mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(X_n \geq n \text{ für unendlich viele n}) = 0$$

gilt.

Lösung:

a) Sei $\Omega := [0, 1]$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}([0, 1])$ und $\mathbb{P}$ das Lebesgue Mass auf $[0, 1]$. Betrachte die Mengen $A_n := [0, 1/n)$ und beachte $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

sowie

$$\mathbb{P}(\cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} A_k) = \mathbb{P}(\cap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Hier ist das Borel-Cantelli Lemma nicht anwendbar, da die A_n's nicht unabhängig sind. In der Tat gilt, dass

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_m) = \frac{1}{\max\{n, m\}} \overset{\text{i.allg.}}{\neq} \frac{1}{n}\frac{1}{m} = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_m).$$

Im Allgemeinen gilt, dass jede absteigende Folge von Ereignissen auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum Ω mit $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ und $\sum P(A_n) = \infty$ ein solches Beispiel ist. $[0, \frac{1}{n})$ mit dem Lebesgue Mass ist nur eine Möglichkeit. Man könnte auch die Poissonverteilung auf N_0 nehmen und $A_n = [k_n, \infty)$ mit geeignetem k_n.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} e^{-\lambda_n}\frac{\lambda_n^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{C^k}{k!} = Ce^C < \infty.\end{aligned}$$

Die erste Aussage des Borel-Cantelli Lemmas liefert dann das Resultat.

3. Sei $(\{0, 2\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ das Modell für den unendlichen Münzwurf mit Erfolgsparameter $p \in (0, 1)$. Wir betrachten die Zufallsvariable

$$X : \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1], \qquad \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \frac{1}{3^n}.$$

Man zeige

a) X ist messbar.

b) Die Verteilungsfunktion F von X ist stetig.

c) Es gibt disjunkte Intervalle $I_k \subseteq [0, 1]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ derart, dass F konstant ist auf jedem I_k und $\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = 1$ gilt. (Wobei λ das Lebesgue-Mass bezeichnet.)

Hinweise:
- $X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)\frac{1}{3^n}$.
- F ist vor allem konstant auf Intervallen die keine Werte aus dem Bild von X enthalten. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Überlegung induktiv, von Münzwurf zu Münzwurf, eine Folge von Mengen (Vereinigung von Intervallen) auf denen F konstant ist.

Lösung:

a) Die "Projektionen" $X_n(\omega) = \omega_n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sind ja definitionsgemäss messbar (da wir mit der von ihnen erzeugten σ-Algebra auf Ω arbeiten), also auch die endliche Summe $\sum_{n=1}^{k} X_n \frac{1}{3^n} \xrightarrow[k\to\infty]{} X$ und somit auch deren punktweiser Grenzwert.

b) In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ existieren links- und der rechtsseitiger Grenzwert von F. Die Differenz beider ist gegeben durch $\mu_X[\{x\}]$, also ist F stetig genau dann wenn $\mu_X[\{x\}] = 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Definitionsgemäss gilt ja $\mu_X[\{x\}] = \mathbb{P}\left(X^{-1}(x)\right)$, wenn wir also zeigen, dass

X injektiv ist (also $X^{-1}(x)$ maximal einen Pfad enthält), und dass die Wahrscheinlichkeit eines jeden einzelnen Pfades 0 ist, dann folgt $\mu_X[\{x\}] = 0$ und somit die Stetigkeit von F.

X ist injektiv: Seien $\omega \neq \widetilde{\omega}$ und $i \in \mathbb{N}^+$ das erste i mit $\omega_i \neq \widetilde{\omega}_i$. O.B.d.A. können wir $\omega_i = 0$ und $\widetilde{\omega}_i = 2$ annehmen. Dann ist

$$\begin{aligned} X(\widetilde{\omega}) - X(\omega) &= \frac{2}{3^i} + \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{\omega_n}{3^n} - \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{\widetilde{\omega}_n}{3^n} \geq \frac{2}{3^i} - \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\ &= \frac{2}{3^i} - \frac{2}{3^{i+1}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}} = \frac{1}{3^i}, \end{aligned} \tag{2}$$

also $X(\widetilde{\omega}) \neq X(\omega)$.

Die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Pfades ist 0:Sei $p \in (0,1)$ und o.B.d.A. $p > (1-p)$, für einen beliebigen Pfad ω ist ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten n Münzwürfe zu ω passen kleiner als p^n, die Wahrscheinlichkeit, dass alle Münzwürfe zu ω passen ist daher kleiner als p^n für alle $n \in \mathbb{N}$, also muss sie 0 sein.

c) Im ersten Schritt (Münzwurf) entscheidet sich ob der Funktionswert von X in $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ oder in $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ liegt, insbesondere liegt er sicher nicht in $K_1 := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (im Fall $\omega_1 = 0$ ist, wie schon oben berechnet, $X(\omega) \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3}$, im Fall $\omega_1 = 2$ gilt sicher $X(\omega) \geq \frac{2}{3}$), F ist also dort konstant. Im nächsten Schritt entscheidet sich dann wieder ob der Funktionswert im unteren oder oberen Drittel des noch möglichen Wertebereichs liegt. Aus den selben Überlegungen wie schon im ersten Schritt liegt er aber sicher nicht im mittleren Drittel. Diese ergebende Menge vom zweiten Schritt bestehet aus zwei Intervallen (das mittlere offene Drittel von $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ und jenes von $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$) und wir bezeichnen sie mit K_2. Offensichtlich ist K_2 disjunkt zu K_1 und hat zwei Drittel des Masses von K_1. Wenn wir induktiv so weiter gehen erhalten wir eine Folge K_n (bestehend aus 2^{n-1} Intervallen) mit $\lambda(K_n) = \frac{2}{3}\lambda(K_{n-1})$. Daraus ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \lambda(K_1) = \lambda(K_1) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3} = \frac{1}{3}3 = 1.$$

4. Historisch hat das sogenannte *Bertrand'sche Paradox* eine wichtige Rolle gespielt. Es geht dabei darum, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine zufällig gewählte Sehne im Einheitskreis länger als $x \in [0,2]$ ist. Je nachdem, wie man die zufällige Wahl einer Sehne definiert, erhält man unterschiedliche Antworten. Sei λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^2$, für eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 < \lambda(A) < \infty$ definieren wir die Gleichverteilung $\mathbb{P}$ auf A durch

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\lambda(B \cap A)}{\lambda(A)}, \qquad \left(B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right).$$

Wir betrachten die folgenden möglichen Definitionen einer zufälligen Sehne.

a) Die beiden Endpunkte S_1, S_2 der Sehne sind gleichverteilt auf dem Kreisumfang, d.h. gleichverteilt auf $[0, 2\pi)^2$.

b) Der Mittelpunkt der Sehne ist gleichverteilt auf der Kreisscheibe.

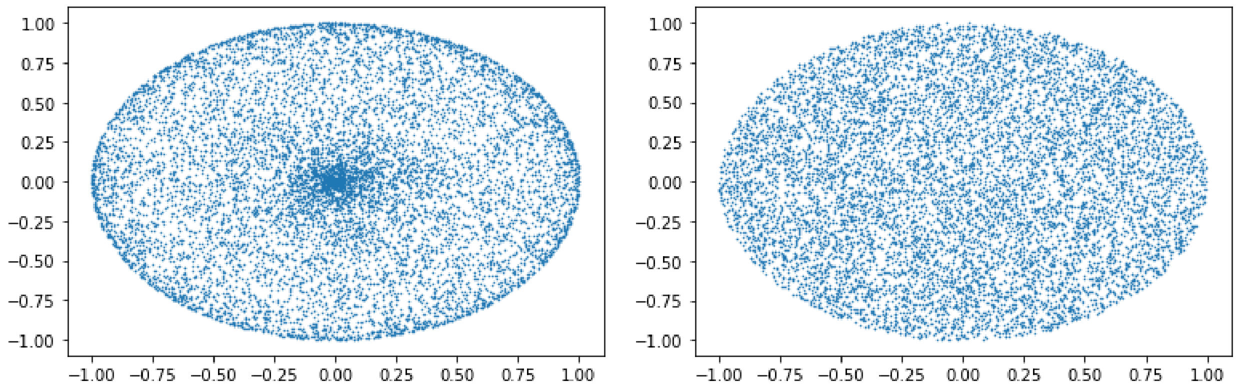


Abbildung 1: Die zwei verschiedenen Verteilungen auf dem Einheitskreis mit $N = 10000$ Realisierungen: Links finden wir die Verteilung von a), während rechts die von b).

Geben Sie für beide Möglichkeiten a) und b) den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sowie die Zufallsvariable S an, welche die Länge der Sehne modelliert und berechnen Sie die Verteilungsfunktion von S sowie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\left(S > \sqrt{3}\right)$.

Lösung:

a) Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist gegeben durch

$$\left([0, 2\pi)^2, \mathcal{B}\left([0, 2\pi)^2\right), \frac{\lambda|_{\mathcal{B}([0,2\pi)^2)}}{4\pi^2}\right).$$

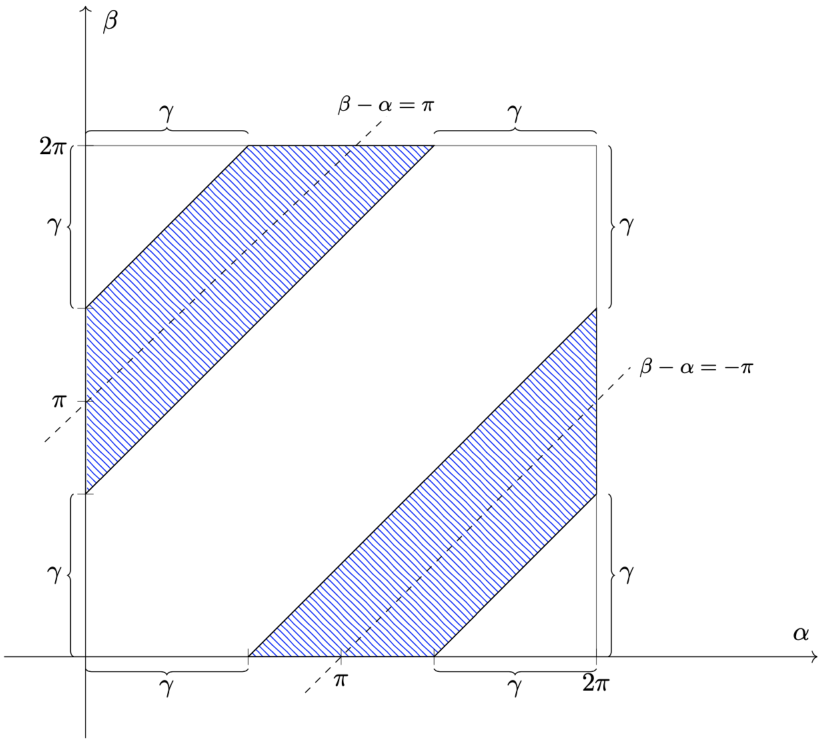
Sind S_1 und S_2 zwei Punkte auf dem Einheitskreis mit Winkeln α und β, dann ist die Länge der zugehörigen Sehne gegeben durch $s = 2\sin\left(\frac{|\alpha-\beta|}{2}\right)$. Dadurch ergibt sich die Zufallsvariable S zu

$$S : [0, 2\pi)^2 \to [0, 2] \qquad\qquad (\alpha, \beta) \mapsto 2\sin\left(\frac{|\alpha - \beta|}{2}\right).$$

Der Bereich $S > x$, für $x \in [0, 2]$, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\{S > x\} &= \left\{(\alpha, \beta) \in \Omega \,\middle|\, 2\sin\left(\frac{|\alpha - \beta|}{2}\right) > x\right\} \\ &= \left\{(\alpha, \beta) \in \Omega \,\middle|\, |\alpha - \beta| > 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right\},\end{aligned}$$

wobei bei der letzten Umformung die Monotonie des arcsin auf $[0, 1]$ zu beachten ist. Sei $\gamma := 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$. Dann stellt die schraffierte Fläche in der unterstehenden Abbildung den Bereich $S > x$ dar.



Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > x) &= \frac{\lambda(\{S > x\})}{\lambda(\Omega)} = \frac{\left(2\pi - 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{4\pi^2} \\ &= \frac{4\pi^2 - 8\pi\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{4\pi^2} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right),\end{aligned}$$

und somit

$$F_S(x) := \mathbb{P}(S \leq x) = 1 - \mathbb{P}(S > x) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right),$$

sowie $\mathbb{P}\left(S > \sqrt{3}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\underbrace{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}$.

b) Sei $E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist dann

$$\left(E, \mathcal{B}(E), \frac{\lambda|_{\mathcal{B}(E)}}{\pi}\right).$$

Sei r der Abstand des Sehnenmittelpunktes vom Kreismittelpunkt und s die Länge der Sehne, aus dem Satz von Pythagoras folgt $\left(\frac{s}{2}\right)^2 + r^2 = 1$ und daraus $s = 2\sqrt{1 - r^2}$. Die Zufallsvariable S ist somit

$$S : E \to [0,2] \qquad (x,y) \mapsto 2\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = 2\sqrt{1 - r^2}.$$

Der Bereich in E für den $S > s \in [0,2]$ gilt, ist der Kreis mit Radius $r = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$ woraus sich

$$\mathbb{P}(S > s) = \frac{\left(1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2\right)\pi}{\pi} = 1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2,$$

und weiters

$$F_S(s) := \mathbb{P}(S \leq s) = 1 - \mathbb{P}(S > s) = \left(\frac{s}{2}\right)^2,$$

sowie $\mathbb{P}\left(S > \sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}$.

Bemerkung: In Punkt (b) ist es natürlich auch folgendes Setting naheliegend: Als Wahrscheinlichkeitsraum wählen wir

$$\left([0,1] \times [0,2\pi), \mathcal{B}([0,1] \times [0,2\pi)), \frac{\lambda|_{\mathcal{B}([0,1]\times[0,2\pi))}}{2\pi}\right),$$

mit der Zufallsvariable

$$S : [0,1] \times [0,2\pi) \to [0,2] \qquad (r,\phi) \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{1-r^2},$$

was zu einem weiteren unterschiedlichen Resultat führt.

Insgesamt sieht man hier, dass Wahrscheinlichkeiten von der Wahl des Grundraumes (bzw. dessen Parametrisierung) und der Wahrscheinlichkeitsverteilung darauf abhängen. Zur Zeit Bertrands (der Gründerzeit der Stochastik) wurde die Tatsache, dass es unterschiedliche Lösungen gibt als Paradoxon angesehen. Zu seiner Zeit wurde es als selbstverständlich angesehen, dass es eine "natürliche" Antwort geben musste. Heute wissen wir, dass die Antwort davon abhängt, wie man "zufällig gewählte Sehne" definiert. Jede der obigen Antworten ist unter der entsprechenden Voraussetzung der genannten Gleichverteilung richtig, aber eine "natürliche" Antwort existiert nicht.