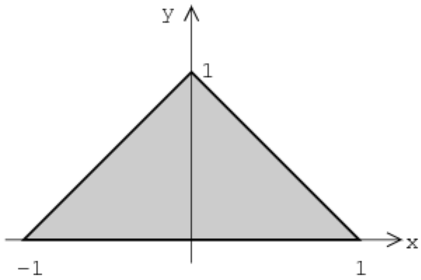
Wahrscheinlichkeit und Statistik

Musterlösung Serie 7

1. Die gemeinsame Dichte der beiden Zufallsvariablen X und Y sei konstant gleich c auf dem grauen Dreieck und 0 ausserhalb.



a) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichtefunktion $f_{X,Y}$.

b) Bestimmen Sie die beiden Randdichten.

c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

d) Bestimmen Sie die Kovarianz von X und Y. Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie die Antwort.

Lösung:

a) Wir bezeichnen das Dreieck mit D. Dann ist laut Angabe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & (x,y) \in D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Fläche von D ist 1, daraus folgt sofort $1 = \int\int_D c\,dxdy = c$, also $c = 1$.

b)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^{x+1} 1\,dy = x+1 & -1 \le x < 0 \\ \int_0^{-x+1} 1\,dy = 1-x & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_{-1+y}^{1-y} 1\,dy = 2(1-y) & 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

c) Wir haben:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x^2 + x)\,dx + \int_0^1 (x - x^2)\,dx = 0,$$

und

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \frac{1}{6}.$$

Also folgt es, dass $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{6}$. Ähnlich haben wir, dass

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_0^1 2y(1-y)\, dy = \frac{1}{3},$$

und

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\, dy = \int_0^1 2y^2(1-y)\, dy = \frac{1}{6}.$$

So folgt: $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$.

d) Es gilt: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Wir berechnen zuerst $\mathbb{E}[XY]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\, dxdy = \int\int_D xy\, dxdy \\ &= \int_{y=0}^{1}\int_{-1+y}^{1-y} xy\, dxdy = \int_0^1 yx^2\big|_{x=-1+y}^{1-y}\, dy \\ &= \int_0^1 y((1-y)^2 - (-1+y)^2)\, dy = 0.\end{aligned}$$

Somit ist wegen $\mathbb{E}[X] = 0$ auch $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, d.h. X und Y sind unkorreliert. Die Zufallsvariablen X und Y sind aber nicht unabhängig, das ergibt sich sofort aus $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$. Das ist aber auch intuitiv sofort klar, denn abhängig von der Beobachtung von Y kann man gewisse Werte für X sofort ausschliessen. Wenn Y z.B. $\frac{1}{2}$ ist, dann kann der Betrag von X nicht mehr grösser als $\frac{1}{2}$ sein, was a priori (also bevor man Y kennt) nicht auszuschliessen ist. Aus der Beobachtung von Y gewinnt man also Information über X (bedingte Verteilung von X gegeben Y).

2. Eine wichtige Verteilung zur Modellierung von positiven Zufallsvariablen ist die sogenannte *lognormal Verteilung*. Man nennt eine positive Zufallsvariable Y *lognormal verteilt* wenn $X := \log(Y)$ normalverteilt ist ($\log$ = Logarithmus zur Basis e), oder anders ausgedrückt, wenn sich Y in der Form $Y = \exp(X)$ schreiben lässt, wobei X normalverteilt ist.

   a) Berechnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion und die Dichte der lognormal verteilten Zufallsvariable $Y = \exp(X)$, wobei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
   b) Begründen Sie mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung, ob $\mathbb{E}[\exp(X)]$ oder $\exp(\mathbb{E}[X])$ grösser ist (für beliebiges X mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$). Berechnen Sie danach $\mathbb{E}[\exp(X)]$ für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
   c) Sei $\log(Y) \sim \mathcal{N}(4.0, 0.5)$, berechnen Sie $\mathbb{P}(Y > 100)$ und das 5%-Quantil von Y.
   Hinweis: Benützen Sie dazu das Computer Algebra System Ihrer Wahl, oder die Tabelle für die Standardnormalverteilung.

Lösung: Die Verteilungsfunktion einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable bezeichnen wir wie üblich mit Φ_{μ,σ^2}, die der Standardnormalverteilung mit Φ. Nicht immer, aber sehr oft, ist folgende Formel nützlich (siehe Slide 184):

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

a) Für $t \leq 0$ ist $F_Y(t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = 0$.
Für $t > 0$ ist

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(e^X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \log(t)) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(\log(t)) \\ &= \int_{-\infty}^{\log(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx \\ &\overset{s=e^x}{=} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(s)-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{s} \, ds. \end{aligned}$$

Also gilt

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)^2} & t > 0 \end{cases}.$$

b) Nach der Jensenschen Ungleichung gilt für konvexe Funktionen f und beliebige integrierbare Zufallsvariablen, dass

$$f\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}\left[f(X)\right].$$

Für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{2\sigma^2 x}{2\sigma^2} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\left(\left(x-(\mu+\sigma^2)\right)^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4\right)} \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-\left(x-(\mu+\sigma^2)\right)^2}{2\sigma^2}} e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-\left(x-(\mu+\sigma^2)\right)^2}{2\sigma^2}} \, dx \; e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \, dz}_{=1} \; e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ &= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}. \end{aligned}$$

Dies ist grösser als $\exp\left(\mathbb{E}[X]\right) = e^{\mu}$.

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > 100) &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 100) = 1 - \mathbb{P}[X \leq \log(100)) \\ &= 1 - \Phi_{4,0.5}(\log(100)) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(100) - 4}{\sqrt{0.5}}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.8558) \approx 0.196 \end{aligned}$$

Das 5%-Quantil ist jenes $c \in \mathbb{R}$ mit

$$0.05 = \mathbb{P}(Y \leq c) = \Phi\left(\frac{\log(c) - 4}{\sqrt{0.5}}\right),$$

woraus

$$\frac{\log(c)-4}{\sqrt{0.5}} = \underbrace{\Phi^{-1}(0.05)}_{=-\Phi^{-1}(1-0.05)=-\Phi^{-1}(0.95)} = -1.645,$$

und somit $c = e^{-1.645\sqrt{0.5}+4} = 17.06$ folgt.

3. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Wir definieren die *charakteristische Funktion von X* durch

$$\begin{aligned}\varphi_X \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ t &\longmapsto \varphi_X(t) := \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx),\end{aligned}$$

wobei μ die Verteilung von X ist (die letzte Gleichung folgt aus dem Transformationssatz für Masse). Sie stellt ein wichtiges analytisches Hilfsmittel dar, welches die Verteilung einer Zufallsvariable eindeutig bestimmt (charakterisiert).

a) Zeigen Sie folgende Eigenschaften:
   - $\varphi_X(0) = 1$,
   - $|\varphi_X(t)| \leq 1$,
   - φ_X ist stetig, und
   - $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass falls das n-te Moment von X existiert, d.h. $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$, dann ist φ_X n-mal differenzierbar, und für alle $k \leq n$ gilt

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k e^{itX}\right]$$

(insbesondere $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}\left[X^k\right]$).

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage durch Induktion, verwenden Sie dabei $\left|\frac{e^{i\alpha}-1}{\alpha}\right| \leq 1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) und den Satz von der dominierten Konvergenz.

c) Leiten Sie eine Differentialgleichung für die charakteristische Funktion φ der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung unter Verwendung von b) und partieller Integration her, und berechnen Sie daraus φ.

Lösung:

a) Es gelten
   - $\varphi_X(0) = \mathbb{E}[e^0] = \mathbb{E}[1] = 1$ und
   - $|\varphi_X(t)| = \left|\mathbb{E}[e^{itX}]\right| \leq \mathbb{E}[\left|e^{itX}\right|] = \mathbb{E}[1] = 1$.
   - Stetigkeit von φ_X: Sei $(t_n)_n$ ein Folge in $\mathbb{R}$ die gegen $t \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann konvergiert die Funktionenfolge $f_n(x) := e^{it_nx}$ punktweise gegen $f(x) := e^{itx}$. Da die konstante Funktion 1 eine integrierbare Majorante für (f_n) darstellt, können wir den Satz der dominierten Konvergenz anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\varphi_X(t_n) &= \int_{\mathbb{R}} e^{it_nx}\,\mu(dx)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mu(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx) = \varphi_X(t).\end{aligned}$$

- Schliesslich gilt noch

$$\varphi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}[e^{it(aX+b)}] = e^{itb}\mathbb{E}[e^{itaX}] = e^{itb}\varphi_X(at).$$

b) Offensichtlich gilt die Aussage für $k = 0$. Nehmen wir also an, dass die Aussage für beliebiges $k < n$ gilt, dann müssen wir zeigen, dass sie auch für $k+1$ gilt. Zunächst machen wir die Abschätzung

$$\left| i^k x^k \frac{e^{i(t+h)x} - e^{itx}}{h} \right| = \left| i^k x^{k+1} e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{hx} \right| = \underbrace{\left| i^k e^{itx} \right|}_{=1} |x|^{k+1} \underbrace{\left| \frac{e^{ihx} - 1}{hx} \right|}_{\leq 1} \leq |x|^{k+1},$$

wegen $\mathbb{E}[|X|^{k+1}] \leq \mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ ist also $|X|^{k+1}$ eine integrierbare Majorante für jede beliebige Funktionenfolge $f_n(\omega) := \left| i^k X(\omega)^k \frac{e^{i(t+h_n)X(\omega)} - e^{itX(\omega)}}{h_n} \right|$. Sei (h_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ die gegen 0 konvergiert. Mit der Linearität des Erwartungswertes und dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt dann für beliebiges $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\frac{\varphi_X^{(k)}(t+h_n) - \varphi_X^{(k)}(t)}{h_n} = \frac{i^k\mathbb{E}[X^k e^{i(t+h_n)X}] - i^k\mathbb{E}[X^k e^{itX}]}{h_n}$$

$$= \mathbb{E}\left[\underbrace{i^k X^k \frac{e^{i(t+h_n)X} - e^{itX}}{h_n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} i^k X^k \frac{d}{dt} e^{itX} = i^{k+1} X^{k+1} e^{itX}} \right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[i^{k+1} X^{k+1} e^{itX}] = i^{k+1}\mathbb{E}[X^{k+1} e^{itX}],$$

d.h. $\varphi^{(k)}$ ist differenzierbar mit Ableitung $\varphi^{(k+1)}(t) = i^{k+1}\mathbb{E}[X^{k+1}e^{itX}]$.

c) Sei Y eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Dann ist

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}}}_{=f_Y(y)} e^{ity} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{\frac{-x^2}{2}} dx,$$

wobei die letzte Gleichheit aus $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ und der Tatsache dass der sin ungerade ist folgt. Die charakteristische Funktion φ_Y ist nach t differenzierbar und wir dürfen die Ableitung in das Integral hineinziehen, da die Normalverteilung endliches erstes Moment hat. Wir differenzieren nach t und integrieren dann partiell nach x:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\varphi_Y'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sin(tx)}_{=:u} \underbrace{(-x)e^{\frac{-x^2}{2}}}_{=:v'} dx \\
&= \underbrace{\sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos(tx)t}_{=u'} \underbrace{e^{\frac{-x^2}{2}}}_{=v} dx \\
&= -\sqrt{2\pi} t \varphi_Y(t),
\end{aligned}$$

und somit $\frac{\varphi_Y'(t)}{\varphi_Y(t)} = -t$. Beide Seiten von 0 bis t integrieren ergibt einerseits

$$\int_0^t \frac{\varphi_Y'(s)}{\varphi_Y(s)} ds = \int_0^t \frac{d}{ds} \log(\varphi_y(s)) ds = \log(\varphi_Y(t)) - \underbrace{\log(\varphi_Y(0))}_{=0} = \log(\varphi_Y(t))$$

sowie andererseits $\int_0^t -s ds = -\frac{t^2}{2}$. Insgesamt folgt

$$\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

4. **Exponentielle Chebyshev-Ungleichung, Laplacetransformierte der Poissonverteilung.**

   a) Es sei X eine Zufallsvariable und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
   $$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \inf_{s \geq 0} e^{-sa}\mathbb{E}[e^{sX}]. \tag{1}$$

   b) Die Anzahl N der Autounfälle in Zürich während eines Jahres sei poissonverteilt zum Parameter λ, d.h.
   $$\mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} .$$
   Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^{sN}]$ für $s \in \mathbb{R}$.

   c) Finden Sie mit der Ungleichung (1) eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens m Autounfälle stattfinden. Für welche Werte von (λ, m) ist diese Schranke nicht trivial (also kleiner als 1)?

Lösung:

a) Für jedes $s \geq 0, a \in \mathbb{R}$ gilt, dass $1_{\{X \geq a\}} \leq e^{s(X-a)}$. Somit ist
$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{E}[1_{\{X \geq a\}}] \leq \mathbb{E}[e^{s(X-a)}] = e^{-sa}\mathbb{E}[e^{sX}],$$
und folglich $\mathbb{P}[X \geq a] \leq \inf_{s \geq 0} e^{-sa}\mathbb{E}[e^{sX}]$.

b)
$$\mathbb{E}[e^{sN}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}e^{sn} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^s} = e^{\lambda(e^s-1)}.$$
$\mathbb{E}[e^{sN}]$ heisst "Laplacetransformierte" von N. Es ist eine sogenannte momenterzeugende Funktion, denn z.B. kann man nun leicht $\mathbb{E}[N]$ und $\mathbb{E}[N^2]$ berechnen:
$$\mathbb{E}[N] = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E[e^{sN}] = e^{\lambda(e^s-1)}\lambda e^s\Big|_{s=0} = \lambda,$$
$$\mathbb{E}[N^2] = \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} E[e^{sN}] = e^{\lambda(e^s-1)}\lambda^2 e^{2s} + e^{\lambda(e^s-1)}\lambda e^s\Big|_{s=0} = \lambda + \lambda^2,$$
also Var(N) $= \lambda$.

c) Wegen Teilaufgaben a) und b) erhält man
$$\mathbb{P}(N \geq m) \leq \inf_{s \geq 0} e^{-sm}e^{\lambda(e^s-1)}.$$
Wir betrachten nun der Exponent $f(s) := -sm + \lambda(e^s - 1)$. Für $m > 0$ (nur dieser Fall ist von Interesse) gilt, dass $\lim_{s \to \pm\infty} f(s) = +\infty$. Also nimmt f sein Minimum an einer Stelle s_0 an. Aus der Gleichung $0 = f'(s) = -m + \lambda e^s$ folgt, dass $s_0 = \log(m/\lambda)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

   (i) $m > \lambda$ d.h. $s_0 > 0$. Dann ist
   $$\inf_{s \geq 0} f(s) = f(s_0) = -m\log(m/\lambda) + \lambda(m/\lambda - 1) = \log\left(\left(\lambda/m\ e^{1-\lambda/m}\right)^m\right)$$
   und folglich
   $$\mathbb{P}(N \geq m) \leq \left(\frac{\lambda}{m}\left(e^{1-\lambda/m}\right)\right)^m = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^m e^{m-\lambda}.$$
   Diese Schranke ist nicht trivial, denn wegen $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$ gilt
   $$\frac{\lambda/m}{e^{\lambda/m-1}} < \frac{\lambda/m}{\lambda/m - 1 + 1} = 1.$$

   (ii) $m \leq \lambda$, also $s_0 \leq 0$. In diesem Fall $\inf_{s \geq 0} f(s) = f(0) = 0$. Also erhalten wir nur die triviale Schranke $\mathbb{P}(N \geq m) \leq 1$.