Wahrscheinlichkeit und Statistik

Musterlösung Serie 9

1. Für eine Luftseilbahn soll die obere Schranke n für die Anzahl der zu befördernden Passagiere pro Fahrt so bestimmt werden, dass mit der Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 die Gesamtnutzlast $G = 9000\,kg$ nicht überschritten wird. Die Zufallsvariable X bezeichne das Gewicht einer zufällig ausgewählten Person in Winterbekleidung und mit Skiausrüstung. Wir nehmen an, dass X die folgende Dichte $f(x)$ besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{40}x - c & \text{falls } 40 \leq x \leq 80 \\ -\frac{c}{40}x + 3c & \text{falls } 80 \leq x \leq 120 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie c und berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}(X)$.

b) Bestimmen Sie n mittels Approximation durch die Normalverteilung.

Lösung:

a) Es muss gelten, dass

$$1 = \int_{40}^{120} f(x)dx = \int_{40}^{80} \left(\frac{c}{40}x - c\right) dx + \int_{80}^{120} \left(-\frac{c}{40}x + 3c\right) dx = 40c.$$

Somit muss $c = \frac{1}{40}$ sein. Der Erwartungswert von X ist

$$\mathbb{E}[X] = \int_{40}^{120} xf(x)dx = 80,$$

und die Varianz findet man via $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{40}^{120} x^2 f(x)\,dx = \int_{40}^{80} x^2 \left(\frac{x}{1600} - \frac{1}{40}\right) dx + \int_{80}^{120} x^2 \left(-\frac{x}{1600} + \frac{3}{40}\right) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{6400} - \frac{x^3}{120}\right)\Big|_{40}^{80} + \left(\frac{x^3}{40} - \frac{x^4}{6400}\right)\Big|_{80}^{120} = \frac{20000}{3}. \end{aligned}$$

Somit lautet die Varianz: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{20000}{3} - 80^2 = \frac{800}{3}$.

b) Laut Aufgabenstellung soll $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq 9000\right) \geq 0.99$, wobei alle X_i unabhängig und identisch verteilt sind, die dieselben Verteilung wie X haben. Das ist äquivalent zu

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mathbb{E}[X]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(X)}} \leq \frac{9000 - n\mathbb{E}[X]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(X)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{9000 - n\mathbb{E}[X]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(X)}}\right) \geq 0.99\,.$$

Der Tabelle der Normalverteilung entnimmt man, dass das für

$$\frac{9000 - n\mathbb{E}[X]}{\sqrt{n\mathrm{Var}(X)}} \geq 2.326$$

der Fall ist. Diese Ungleichung ist erfüllt für $n \leq 107$.

2. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ und $\mathrm{Var}(X) > 0$. Die Korrelation von X und Y sei mit $\rho := \rho(X, Y)$ bezeichnet. Wir wollen Y mit einer linearen Prognosefunktion $\alpha X + \beta$ voraussagen. Und zwar so, dass der mittlere quadratische Fehler minimal wird, d.h. $\mathbb{E}[(Y - \text{Prognose})^2]$ soll möglichst klein sein.

   a) Bestimmen Sie β so, dass $\mathbb{E}[(Y-\beta)^2]$ minimal wird und geben Sie das zugehörige Minimum an.

   b Bestimmen Sie α und β so, dass $\mathbb{E}[(Y - (\alpha X + \beta))^2]$ minimal wird und geben Sie auch hier das zugehörige Minimum an.

   c) Zeigen Sie, dass das Verhältnis $\frac{\text{Minima b)}}{\text{Minima a)}}$ durch $1 - \rho^2$ gegeben ist. Wie ist dieses Ergebnis zu interpretieren bzw. wann macht es Sinn die Zufallsvariable X in die Prognose für Y einzubeziehen?

   d) Folgeren Sie aus Punkt b), dass

$$|\rho| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R} : Y \overset{\text{f.ü.}}{=} \alpha X + \beta.$$

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Y-\beta)^2] &= \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y] - \beta)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y]^2 + 2\mathbb{E}\left[Y - \mathbb{E}[Y]\right)(\mathbb{E}[Y] - \beta)\right] + (\mathbb{E}[Y] - \beta)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y])^2\right] + 2\underbrace{\mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y])(\mathbb{E}[Y] - \beta)\right]}_{=(\mathbb{E}[Y]-\beta)\,\mathbb{E}[Y-\mathbb{E}[Y]]=0} + (\mathbb{E}[Y] - \beta)^2,
\end{aligned}$$

also ist $\mathbb{E}[(Y-\beta)^2]$ minimal, wenn der letzte Term oben verschwindet, also wenn $\beta = \mathbb{E}[Y]$. Das Minimum ist dann $\mathbb{E}[(Y-\beta)^2] = \mathrm{Var}(Y)$.

b) Gesucht sind nun α und β, sodass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(Y - (\alpha X + \beta))^2\right] &= \mathrm{Var}(Y - (\alpha X + \beta)) + \mathbb{E}[Y - (\alpha X + \beta)]^2 \\
&= \mathrm{Var}(Y - \alpha X) + \mathbb{E}[Y - (\alpha X + \beta)]^2
\end{aligned}$$

minimal wird. Da der erste Term unabhängig von β ist, braucht β nur den zweiten Summanden zu minimieren. Offensichtlich ist

$$\beta = \mathbb{E}[Y] - \alpha\mathbb{E}[X]$$

die richtige Wahl, da dann $\mathbb{E}Y - (\alpha X + \beta)^2\ (\geq 0)$ verschwindet. Um den anderen Term zu minimieren formen wir zunächst um. Aus der Bilinearität der Kovarianz folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y - \alpha X) &= \mathrm{Cov}(Y - \alpha X, Y - \alpha X) \\
&= \mathrm{Var}(Y) + \alpha^2\mathrm{Var}(X) - 2\alpha\mathrm{Cov}(X, Y).
\end{aligned}$$

Ableiten nach α und Null setzen

$$\frac{d}{d\alpha}\mathrm{Var}(Y - \alpha X) = 2\alpha\mathrm{Var}(X) - 2\mathrm{Cov}(X, Y) = 0,$$

ergibt $\alpha = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}$. Mit dieser Wahl von α und β ergibt sich dann das Minimum zu

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(Y-(\alpha X+\beta))^2\right] \\
&= \text{Var}(Y) + \frac{\text{Cov}(X,Y)^2}{\text{Var}(X)^2}\text{Var}(X) - 2\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}\text{Cov}(X,Y) \\
&= \text{Var}(Y) - \frac{\text{Cov}(X,Y)^2}{\text{Var}(X)} = \text{Var}(Y)\left(1 - \frac{\text{Cov}(X,Y)^2}{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}\right) \\
&= \text{Var}(Y)(1-\rho^2).
\end{aligned}$$

c) Das Verhältnis des mittleren quadratischen Prognosefehlers in b) zu demjenigen aus a) ist $1-\rho^2$. Bei unkorrelierten X und Y (*d.h.* $\rho = 0$) bringt der Einbezug von X in die Prognose also nichts, bei vollständig korrelierten Zufallsvariablen ist sogar eine fehlerfreie Prognose möglich, wenn auf X abgestützt wird.

d) Richtung $\Rightarrow$: Aus Teilaufgabe b) kann man α und β so wählen können, dass

$$\mathbb{E}\left[(Y-(\alpha X+\beta))^2\right] = \text{Var}(Y)(1-\rho^2)$$

gilt. Falls $|\rho| = 1$ gilt, folgt daraus $\mathbb{E}\left[(Y-(\alpha X+\beta))^2\right] = 0$, also $Y-(\alpha X+\beta) \overset{\text{f.ü.}}{=} 0$. Wegen $\rho = \pm 1$ ist $\text{Cov}(X,Y) \neq 0$ und somit auch $\alpha \neq 0$.
Richtung $\Leftarrow$:

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho(X,Y) = \rho(X, \alpha X+\beta) \\
&= \frac{\text{Cov}(X,\alpha X+\beta)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(\alpha X+\beta)}} = \frac{\alpha\text{Var}(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)\alpha^2\text{Var}(X)}} \\
&= \text{sign}(\alpha) = \pm 1,
\end{aligned}$$

wegen $\alpha \neq 0$.

3. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$ wobei $\lambda|_{[0,1]}$ das Lebesguemass auf dem Intervall $[0,1]$ bezeichnet, und eine Folge von Zufallsvariablen $X_n(\omega) = \mathbf{1}_{A_n}(\omega)$ mit $A_n \in \mathcal{B}([0,1])$.

   a) Was soll $(A_n)_n$ erfüllen, damit $X_n(\omega) \xrightarrow{P} 0$?
   b) Drücken Sie das Ereignis $\{\omega | X_n(\omega) \to 0\}$ mit Hilfe der Ereignisse A_n aus.
   c) Geben Sie eine Folge A_n an, sodass $X_n \xrightarrow{P} 0$ aber $\{\omega | X_n(\omega) \to 0\} = \emptyset$.

Lösung:

a) Aus der Konstruktion $X_n(\omega) = \mathbf{1}_{A_n}(\omega)$ folgt, dass für $X_n(\omega) \xrightarrow{P} 0$, die Bedingung $\lambda(A_n) \to 0$ notwendig und hinreichend ist.

b) Da

$$X_n(\omega) = \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

ist $\{\omega | X_n(\omega) \to 0\}$ nur möglich, falls $X_n(\omega) = 0$ für alle bis auf endlich viele n, d.h. $\omega \in (\cap_n \cup_{k \geq n} A_k)^c = \cup_n \cap_{k \geq n} A_k^c$.

c) Sei $M_n \in \mathbb{N}$ die grösste ganze Zahl, sodass $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \geq M_n$. Dann gilt für alle n, dass $\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right) - M_n \in [0,1]$. Wir definieren eine Folge von Paaren (l_n, r_n) mit $l_n \in [0,1]$ und $r_n \in [0,1]$ folgendermassen: $l_n := \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\right) - M_{n-1}$ und $r_n := \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right) - M_n$. Damit konstruieren wir eine Folge A_n als

$$A_n := \begin{cases} [l_n, r_n) & \text{falls } l_n < r_n \\ [0, r_n) \cup [l_n, 1] & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt: $\lambda(A_n) = \frac{1}{n} \to 0$. Daher folgt aus Aufgabenteil a), dass $X_n \xrightarrow{P} 0$. Andererseits folgt aus der Konstruktion der A_n und wegen $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \infty$, dass jedes $\omega \in [0,1]$ Element von unendlich vielen A_n ist. Daher ist $\{\omega \in [0,1] : \omega \in \cup_n \cap_{k\geq n} A_k\} = \cup_n \cap_{k\geq n} A_k = \emptyset$.

4. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte f. Ferner betrachtenn wir $M_k := \max_{1\leq i\leq k} X_i \quad (k \leq n)$.

   a) Bestimmen Sie die kumulative Verteilungsfunktion und die Dichte von M_n.

   b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X_n > M_{n-1})$ (d.h. die Wahrscheinlichkeit dass X_n ein neuer Rekord ist), entweder

      i) mit einem Symmetrieargument, oder

      ii) indem Sie die gemeinsame Dichte von X_n und M_{n-1} über das Gebiet $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq y\}$ integrieren.

Lösung:

a) Die Abbildung $g\colon (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $g(X_1, \ldots, X_n) := \max_{1\leq i\leq n} X_i$ ist messbar, daher ist $M_n(\omega) = g(X_1, \ldots, X_n) = \max_{1\leq i\leq n} X_i(\omega)$ ein eindimensionaler Zufallsvektor. Die Verteilungsfunktion von M_n lautet für $y \in \mathbb{R}$:

$$F_{M_n}(y) = \mathbb{P}(M_n \leq y) = \mathbb{P}(\cap_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{X_i \leq y\}) = \prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(X_i \leq y) = F(y)^n,$$

da die X_i unabhängig und identisch verteilt sind. Die Dichte von M_n ist dann:

$$f_{M_n}(y) = \partial_y F_{M_n}(y) = nF(y)^{n-1}\partial_y F(y) = nF(y)^{n-1}f(y).$$

b) i) Es gilt $\mathbb{P}(X_n > M_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = M_n)$. Da die Zufallsvariablen $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ identisch verteilt sind, gilt $\mathbb{P}(X_n = M_n) = \mathbb{P}(X_i = M_n)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Andererseits ist $\mathbb{P}(\{X_i = M_n\} \cap \{X_j = M_n\}) = 0$ für alle $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$, da $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$. Aus der Konstruktion von M_n folgt auch $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = M_n) = 1$. Deshalb folgt $\mathbb{P}(X_i = M_n) = \frac{1}{n}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, insbesondere $\mathbb{P}(X_n > M_{n-1}) = \frac{1}{n}$.

   ii) Es gilt:

$$\int\int_{\{x\geq y\}} f(x) f_{M_{n-1}}(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_y^\infty f(x)dx \; f_{M_{n-1}}(y) dy.$$

   Wegen $\int_y^\infty f(x)dx = 1 - F(y)$ und durch Einsetzen der Dichten $f_{M_{n-1}}(y)$ und $f_{M_n}(y)$ aus a) folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_{M_{n-1}}(y)\,(1 - F(y))\,dy &= 1 - \int_{\mathbb{R}} f_{M_{n-1}}(y) F(y) dy \\ &= 1 - (n-1)\int_{\mathbb{R}} F(y)^{n-1} f(y) dy = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

5. Sei $f\colon [a,b]^d \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $(X_n)_n$ eine Folge von i.i.d. uniform verteilten Zufallsvariablen auf der Menge $[a,b]^d$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(b-a)^d}{N} \sum_{i=1}^{N} f(X_i) = \int_{[a,b]^d} f(x)\,dx \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Lösung: Da X_i uniform verteilt auf der Menge $[a,b]^d$ ist, gilt

$$\mathbb{E}[f(X_1)] = \int_{[a,b]^d} \frac{f(x)}{(b-a)^d}\,dx.$$

Also können wir das starke Gesetz der grossen Zahlen benutzen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(X_i) = \mathbb{E}[f(X_1)] = \int_{[a,b]^d} \frac{f(x)}{(b-a)^d}\,dx$$

fast sicher.