# Wahrscheinlichkeit und Statistik

## Musterlösung Serie 12

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Verteilen eines Jasskartenspiels (bestehend aus 4 Farben, jeweils von der Sechs bis zum As) auf vier Spielerinnen eine Spielerin alle vier Bauern erhält, ist $\frac{8}{935} \approx \frac{1}{120}$. An einem Jassabend werden die Karten 60 mal ausgeteilt.

   a) Sei $X$ die Anzahl der Austeilungen, bei denen eine Spielerin alle vier Bauern erhält. Welche Verteilung hat $X$? Durch welche andere Verteilung kann man diese sehr gut annähern? Berechnen Sie $\mathbb{P}[X = 0]$ exakt und mit dieser Näherung.

   b) Der tatsächlich beobachtete Wert an diesem Abend ist $x = 3$. Berechnen Sie $\mathbb{P}[X = 3]$ und $\mathbb{P}[X \geq 3]$ mit der Näherung. Kann man das Ereignis noch als "reinen Zufall" betrachten, oder ist da etwas nicht mit rechten Dingen zugegangen?

   **Lösung:**

   a) Das interessierende Ereignis "vier Bauern" kommt in den $n = 60$ (idealerweise) unabhängigen Austeilungen jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p = \frac{8}{935}$ vor. Die Anzahl erfolgreicher Austeilungen ist daher binomialverteilt mit Parametern $n$ und $p$ bzw., da $p$ klein ist, genähert poissonverteilt mit Parameter $\frac{1}{2} = \lambda \approx np$.
   „Exakt" gilt $\mathbb{P}[X = 0] = \binom{60}{0}(\frac{8}{935})^0(\frac{927}{935})^{60} = 59.72\%$, und unter Verwendung der Poissonapproximation gilt $\mathbb{P}[X = 0] \approx e^{-\frac{1}{2}}\frac{(\frac{1}{2})^0}{0!} = e^{-1/2} = 60.65\%$.

   b)
   $$\mathbb{P}[X = 3] \approx e^{-\frac{1}{2}}\frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} = 1.26\%$$
   und
   $$\mathbb{P}[X \geq 3] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 2] \approx 1 - e^{-\frac{1}{2}}\frac{(\frac{1}{2})^0}{0!} - e^{-\frac{1}{2}}\frac{(\frac{1}{2})^1}{1!} - e^{-\frac{1}{2}}\frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} = 1.44\%.$$
   Nur etwa jeden siebzigsten Jassabend ($100/1.44 \approx 70$), bei dem alles mit rechten Dingen zugeht, werden drei- oder mehrmal vier Bauern gewiesen. Das ist so selten, dass es wohl plausibler ist anzunehmen, jemand habe an diesem Abend mit gezinkten Karten gespielt.

2. Zufällig aus einer Population auszuwählende Individuen haben unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p$ eine interessierende Eigenschaft "Erfolg". Wir schätzen den Erfolgsparameter $p \in (0, 1)$ mit zwei verschiedenen Experimenten:

   $A$ : $n$ Individuen, $X$ = Anzahl Erfolge,
   $B$ : $n$ Gruppen mit jeweils $c$ Individuen, $X$ = Anzahl Gruppen mit mindestens 1 Erfolg.

   Die zweite Versuchsanordnung ist naheliegend, wenn es leicht ist, Individuen für einen Test zu finden, der Test selber aber aufwendig ist (Bsp.: Schätzung des Anteils an Insekten, die einen bestimmten Krankheitserreger auf sich tragen).

   a) Bestimmen Sie die Verteilung von $X$ bei Experiment $A$ und $B$.

   b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für $p$ in den beiden Experimenten.

c) Sind die Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu in Experiment $A$ und $B$?

d) Berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler $\mathbb{E}_p\left[(T-p)^2\right]$ für $p=0.2, n=5, c=2$ in beiden Fällen und kommentieren Sie das Ergebnis.

**Lösung: Experiment A:** $n$ Individuen, $X$ = Anzahl Erfolge

a) $X \sim Bin(n,p)$, d.h. $\mathbb{P}[X=x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$.

b) Der Maximum-Likelihood-Schätzer für $p$ ist:

$$T_A = \arg\max_{0<p<1} L(p;x),$$

wobei

$$\log L(p;x) = \log \binom{n}{x} + x \log p + (n-x)\log(1-p).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dp}\log L(p;x) = \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} = 0 \\ \iff\ & x - xp = np - xp \\ \iff\ & p = \frac{x}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad T_A = \frac{X}{n}. \end{aligned}$$

c) Der Schätzer $T_A$ ist erwartungstreu, wenn $\mathbb{E}_p[T_A] = p$. Dies ist efüllt wegen

$$\mathbb{E}_p[T_A] = \mathbb{E}_p\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}_p[X] = p.$$

b) Es gilt

$$\mathbb{E}_p\left[(T_A-p)^2\right] = \mathbb{E}_p\left[(T_A-\mathbb{E}_p[T_A])^2\right] = \mathrm{Var}_p(T_A) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}_p(X) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Mit $p=0.2, n=5$ folgt: $\mathbb{E}_p\left[(T_A-p)^2\right] = 0.032$

**Experiment B:** $n$ Gruppen mit jeweils $c$ Individuen, $X$ = Anzahl Gruppen mit mindestens einem Erfolg.

a) $\mathbb{P}[$ mindestens 1 Erfolg in der Gruppe $] = 1 - \mathbb{P}[$ Kein Erfolg $] = 1-(1-p)^c$.
Also $X \sim Bin(n, 1-(1-p)^c)$.

b) Analog zu Experiment A haben wir in diesem Experiment

$$\log L(p;x) = \log\binom{n}{x} + x\log(1-(1-p)^c) + c(n-x)\log(1-p),$$

und damit bekommt man für den Maximum Likelihood Schätzer:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}\log L(p;x) \quad &= \quad x \cdot \frac{c(1-p)^{c-1}}{1-(1-p)^c} - \frac{c(n-x)}{1-p} = 0 \\ &\iff \quad cx(1-p)^c - c(n-x)\left(1-(1-p)^c\right) = 0 \\ &\iff \quad (1-p)^c \cdot (x + (n-x)) = n-x \\ &\iff \quad 1-p = \sqrt[c]{\frac{n-x}{n}} \\ &\iff \quad p = 1 - \sqrt[c]{\frac{n-x}{n}} \qquad \Longrightarrow \quad T_B = 1 - \sqrt[c]{\frac{n-X}{n}} \end{aligned}$$

**c)** $T_B$ ist erwartungstreu, wenn $\mathbb{E}_p[T_B] = p$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_p[T_B] &= \mathbb{E}_p\left[1 - \sqrt[c]{\frac{n-X}{n}}\right] = 1 - \mathbb{E}_p\left[\sqrt[c]{\frac{n-X}{n}}\right] \\
&> 1 - \sqrt[c]{\mathbb{E}_p\left[\frac{n-X}{n}\right]} = 1 - \sqrt[c]{1 - \frac{1}{n}\mathbb{E}_p[X]} \\
&= 1 - \sqrt[c]{1 - \frac{1}{n}n(1-(1-p)^c)} \quad = p,
\end{aligned}$$

wobei wir die strikte Jensen Ungleichung für die konkave Funktion $f(x) = \sqrt[c]{x}$ angewendet haben. Also ist $\mathbb{E}_p[T_B] > p$, d.h. $T_B$ ist nicht erwartungstreu.

d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_p\left[(T_B - p)^2\right] &= \sum_{x=0}^{n}(T_B - p)^2\mathbb{P}_p[X = x] \\
&= \sum_{x=0}^{n}\left(1 - \sqrt[c]{\frac{n-x}{n}} - p\right)^2\binom{n}{x}(1-(1-p)^c)^x(1-p)^{c(n-x)}.
\end{aligned}$$

Mit $p = 0.2,\ n = 5$ erhalten wir: $\mathbb{E}_p\left[(T_B - p)^2\right] = 0.023$.

$T_A$ ist erwartungstreu, $T_B$ hingegen nicht. Aber $T_B$ hat einen kleineren mittleren quadratischen Fehler $\mathbb{E}_p[(T-p)^2]$ als $T_A$. In der mathematischen Statistik wird der Frage nachgegangen werden, wie klein der mittlere quadratische Fehler eines erwartungstreuen Schätzers werden kann.

3. Hundert Würfe einer Münze haben sechzigmal Kopf ergeben. Kann diese Münze fair sein?

a) Führen Sie einen Test zum 1%-Niveau durch. Sollte dieser Test ein- oder zweiseitig sein?

b) Wie oft darf Kopf in hundert Würfen höchstens auftreten, so dass wir die Annahme, dass die Münze fair ist, nicht verwerfen müssen?

c) Bestimmen Sie alle Werte $p_0$, sodass die Nullhypothese "*Wahrscheinlichkeit für Kopf*$=p_0$" auf dem 5% Niveau nicht verworfen wird.

*Hinweis:*: Verwenden Sie den Zentralen Grenzwertsatz, um die benötigten Wahrscheinlichkeiten zu approximieren.

**Lösung:** Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch Bernoulli($p$)-verteilte Zufallsvariablen, sodass $X_i = 1$, falls der $i$-te Wurf Kopf ist und 0 sonst wobei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $n = 100$. Sei $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ die Anzahl Köpfe in den $n$ Würfen. Nach Voraussetzung ist $X$ binomial verteilt mit Parametern $n$ und $p$.

a) Wir führen einen zweiseitigen Test durch:

$$\begin{aligned}
&H_0 : p = p_0 = 1/2, \\
&H_1 : p \neq p_0.
\end{aligned}$$

Unter $H_0$ ist $\mathbb{E}[X] = np_0 = 50$ und $\sigma_X = \sqrt{np_0(1-p_0)} = 5$. Zur Bestimmung des Verwerfungsbereiches zum 1% Niveau: Für $c_1, c_2$ soll

$$\begin{aligned}
0.01 \geq \mathbb{P}_{H_0}(X \notin (c_1, c_2)) &= 1 - \mathbb{P}_{H_0}(X \in (c_1, c_2)) \\
&= 1 - \mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{c_1 - 50}{5} < \frac{X - \mathbb{E}_{H_0}[X]}{\sigma_X} < \frac{c_2 - 50}{5}\right) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{c_2 - 50}{5}\right) + \Phi\left(\frac{c_1 - 50}{5}\right).
\end{aligned}$$

Um den Verwerfungsbereich gross zu machen, muss das Intervall $[c_1, c_2]$ möglichst kurz werden. Wähle daher

$$\frac{c_1 - 50}{5} = -\frac{c_2 - 50}{5}.$$

Dann

$$0.01 \geq 1 - \Phi\left(\frac{c_2 - 50}{5}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{c_2 - 50}{5}\right)$$

also $\Phi\left(\frac{c_2 - 50}{5}\right) \geq 0.995$ und $c_2 \geq 62.9$. Der Verwerfungsbereich ist also durch

$$K_{1\%} = [0, 37] \cup [63, 100]$$

gegeben und die Nullhypothese wird zum Signifikanzniveau 1% nicht verworfen.

b) Einseitiger Test:

$$\begin{aligned}
&H_0 : p = p_0 = 1/2, \\
&H_1 : p > p_0.
\end{aligned}$$

Der Verwerfungsbereich durch die Ungleichung

$$0.01 \geq \mathbb{P}_{H_0}(X > c) = 1 - \Phi\left(\frac{c - 50}{5}\right)$$

bestimmt. Also $c \geq 61.5$ und $K_{1\%} = [62, 100]$. Damit der Test zum 1% die Annnahme einer fairen Münze nicht verwirft, darf höchstens 61 mal Kopf fallen.

c) Wir führen einen zweiseitigen Test durch:

$$\begin{aligned}
&H_0 : p = p_0, \\
&H_1 : p \neq p_0.
\end{aligned}$$

Unter $H_0$ ist $\mathbb{E}[X] = 100p_0$ und $\sigma_X = \sqrt{100p_0(1-p_0)}$. Dann nehmen wir $c_1, c_2$ sodass

$$\begin{aligned}
0.05 &\geq \mathbb{P}_{H_0}(X \notin (c_1, c_2)) \\
&= 1 - \mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{c_1 - 100p_0}{10\sqrt{p_0(1-p_0)}} \leq \frac{X - 100p_0}{10\sqrt{p_0(1-p_0)}} \leq \frac{c_2 - 100p_0}{10\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{c_2 - 100p_0}{10\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) + \Phi\left(\frac{c_1 - 100p_0}{10\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right).
\end{aligned}$$

Genau wie bei Teilaufgabe a) wählen wir

$$\frac{c_1 - 100p_0}{10\sqrt{p_0(1-p_0)}} = -\frac{c_2 - 100p_0}{10\sqrt{p_0(1-p_0)}},$$

und erhalten, dass

$$\Phi\left(\frac{c_2 - 100p_0}{10\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) \geq 0.975.$$

Somit gilt:

$$c_1 \leq 100p_0 - 19.6\sqrt{p_0(1-p_0)} \quad \text{und} \quad c_2 \geq 100p_0 + 19.6\sqrt{p_0(1-p_0)}.$$

Die Werte von $p$, sodass die Nullhypothese auf 5% Niveau nicht verworfen wird kann durch die Menge

$$\begin{aligned}&\left\{p \,|\, 100p - 19.6\sqrt{p(1-p)} \leq 60 \leq 100p + 19.6\sqrt{p(1-p)}\right\}\\ &\left\{p \,|\, (60-100p)^2 \leq 19.6^2 p(1-p)\right\}\\ &= [0.502, 0.691].\end{aligned}$$

beschrieben werden.

4. In einer Studie über die Zuverlässigkeit von Kugellagern wurden von zwei verschiedenen Typen je 10 Stück getestet. Die Anzahl Umdrehungen (in Millionen) waren:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Typ I | 3.03 | 5.53 | 5.60 | 9.30 | 9.92 | 12.51 | 12.95 | 15.21 | 16.04 | 16.84 |
| Typ II | 3.19 | 4.26 | 4.47 | 4.53 | 4.67 | 4.69 | 12.78 | 6.79 | 9.37 | 12.75 |

Vor der Durchführung des Versuchs war nicht klar, welcher Typ wohl zuverlässiger ist.

a) Handelt es sich um einen gepaarten oder um einen ungepaarten Vergleich?
b) Führen Sie den entsprechenden t-Test für die Nullhypothese "erwartete Anzahl Umdrehungen bis zum Ausfall sind gleich für beide Typen" auf dem 5%-Niveau durch.

**Lösung:**

a) Ungepaart.
b) Das Modell ist durch $X_1, \ldots, X_{10}$ iid $\sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_1, \ldots, Y_{10}$ iid $\sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ gegeben, wobei $\mu_X, \mu_Y$ und $\sigma$ unbekannt sind, und $X_i, Y_j$ sind alle unabhängig. Die Null- und die Alternativhypothese lauten:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{und} \quad H_A : \mu_X \neq \mu_Y.$$

Die Teststatistik ist

$$T := \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{S_{\text{pool}}\sqrt{1/n + 1/m}},$$

wobei der Schätzer $S_{\text{pool}}$ für $\sigma$ ist gegeben durch

$$S_{\text{pool}} = \sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{k=1}^{m}(Y_k - \bar{Y}_m)^2\right)}.$$

Die Teststatistik $T$ ist, unter $H_0$, $t$-verteilt mit $n+m-2 = 18$ Freiheitsgraden. Mit einem Niveau vom 5% wird die Nullhypothese genau dann verworfen, wenn $|T| > t_{18,0.975} = 2.101$. Aus den Daten ergibt sich $\bar{x}_{10} = 10.693, \bar{y}_{10} = 6.75$ und $S_{\text{pool}} = 4.255$, also $T = 2.0723$, d.h. $H_0$ wird nicht verworfen.