Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 2

1. Zeigen Sie, dass für beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

$$1_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - 1_{A_i}).$$

Leiten Sie daraus die folgende Formel her:

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}].$$

2. Beweisen Sie mit Induktion, dass für beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}[A_i \cap A_{i+1}]$$

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i,j=1,\ i \neq j}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j].$$

3. Hypergeometrische Verteilung und Binomialverteilung

   a) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ falls

      i. X binomial verteilt ist:

$$P_1[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

      ii. X hypergeometrisch verteilt ist:

$$P_2[X = k] = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

   b) Bestimmen Sie $\mathrm{var}(X) \overset{def}{=} E[X^2] - (E[X])^2$ für beide Verteilungen, indem Sie zuerst $E[X(X-1)]$ berechnen.

   c) Zeigen Sie, dass $P_2[X = k] \to P_1[X = k]$ gilt, falls $N \to \infty$, $K \to \infty$ und $K/N \to p$. (Interpretation: bei einer grossen Population (N) gibt es praktisch keinen Unterschied zwischen Ziehen mit und ohne Zuüucklegen.)

4. Wir betrachten ein Jasskartenspiel. (Ein Jasskartenspiel besteht aus 36 Karten, davon jeweils neun Karten von den vier Farben “Herz”, “Ecke”, “Kreuz” und “Schaufel”). Sie teilen die gut gemischten Karten an sich selbst, Ihren Vater, Ihren Bruder und einen weiteren Mitspieler aus. Jeder bekommt neun Karten.

   a) Auf wieviele Arten können Sie die Karten so austeilen?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit teilen Sie sich selbst nur Karten der Farbe “Herz” aus?
   c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre Karten alle von der gleichen Farbe sind?
   d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre Karten und die Karten Ihres Vaters jeweils alle von der gleichen Farbe sind?
   e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre Karten und die Karten Ihres Vaters jeweils alle von der gleichen Farbe sind, aber die anderen beiden Mitspieler jeweils Karten verschiedener Farben bekommen haben?

   Hinweis: Sie können die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ verwenden, um Ihre Resultate auszudrücken.

Abgabe: Dienstag, den 09.03.2021, online über das SAMUp-Tool.