Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 3

1. **Das Geburtstagsparadox.** Wir betrachten eine Urne mit N Kugeln aus denen wir n Kugeln mit Zurücklegen ziehen.

   a) Sei A_n das Ereignis "Alle n Kugeln haben unterschiedliche Nummern. "
   Berechnen Sie $\mathbb{P}(A_n)$.

   b) Beweisen Sie die beiden Ungleichungen

   $$1 - \frac{n(n-1)}{2N} \leq \mathbb{P}(A_n) \leq \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2N}\right).$$

   c) Berechnen Sie $n_{\min} = \inf\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(A_n) < \frac{1}{2}\}$ für $N = 365$.

   Bemerkung: Im Fall $N = 365$ entspricht die Nummer der Kugel in Ziehung i dem Geburtstag der i-ten Person in einer Gruppe von n Personen. Daher der Name *Geburtstagsparadox*.

2. Wir untersuchen die Erfolgswahrscheinlichkeiten bei einer Aufnahmeprüfung an zwei Departementen einer Universität und betrachten folgende Ereignisse:

   A = "Kandidat ist männlich."
   A^c = "Kandidat ist weiblich."
   B = "Kandidat bewirbt sich bei Departement I."
   B^c = "Kandidat bewirbt sich bei Departement II."
   C = "Kandidat wird aufgenommen."
   C^c = "Kandidat wird abgelehnt."

   Wir nehmen an, dass die folgenden Wahrscheinlichkeiten gelten (diese Zahlen entsprechen relativen Häufigkeiten in Berkeley 1973):

   $\mathbb{P}[A] = 0.73$,
   $\mathbb{P}[B|A] = 0.69,\ \mathbb{P}[B|A^c] = 0.24$,
   $\mathbb{P}[C|A \cap B] = 0.62,\ \mathbb{P}[C|A^c \cap B] = 0.82,\ \mathbb{P}[C|A \cap B^c] = 0.06,\ \mathbb{P}[C|A^c \cap B^c] = 0.07.$

   a) Zeichnen Sie den zu dieser Situation gehörigen Baum.

   b) Erläutern Sie mit Ihren eigenen Worten: $\mathbb{P}[C|A \cap B] = 0.62$, $\mathbb{P}[C|A^c \cap B] = 0.82$, $\mathbb{P}[C|A \cap B^c] = 0.06$, $\mathbb{P}[C|A^c \cap B^c] = 0.07$. Finden Sie, dass aufgrund dieser Zahlen Frauen benachteiligt sind?

   c) Berechnen Sie $\mathbb{P}[C|A]$ und $\mathbb{P}[C|A^c]$ und erläutern Sie mit Ihren eigenen Worten.
   Vergleichen Sie Ihre Resultate mit Ihrer Antwort in b).

3. **Einführung in die Bayes-Statistik.** Wir betrachten m Urnen mit folgender Zusammensetzung: Jede Urne enthält $2m$ Kugeln, und für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ enthält Urne i genau $2i - 1$ rote, und $2m - 2i + 1$ weisse Kugeln. Wir wählen zufällig eine Urne und ziehen daraus n-mal mit Zurücklegen. Es bezeichne $(X_1, \ldots, X_n)$ das Ergebnis der n Ziehungen, wobei

$$X_j = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow j\text{-te Kugel ist rot} \\ 0 \Leftrightarrow j\text{-te Kugel ist weiss.} \end{cases} \tag{1}$$

Die Zusammensetzung der gewählten Urne ist nicht direkt ersichtlich, aber man kann versuchen auf Grund der Ergebnisse $(X_1, \ldots, X_n)$ Rückschlüsse zu ziehen.

a) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$, wobei $x_j \in \{0, 1\}$ gemäss (1) für $j \in \{1, \ldots, m\}$ ist. Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig?

b) Berechnen Sie

$$\mathbb{P}\left(\text{Gewählte Urne enthält } 2i - 1 \text{ rote Kugeln} \,|\, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right)$$

und zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit nur von $k := \sum_{j=1}^{n} x_j$ (d.h. von der Gesamtzahl der roten Kugeln in der Stichprobe) abhängt. Geben Sie die Zahlenwerte an für $n = 3,\ m = 3$ in den Fällen $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$k = 0$			
$k = 1$			
$k = 2$			
$k = 3$			

und vergleichen Sie diese mit Ihrer Vermutung vor dem Rechnen.

4. **Das Ziegen Problem.** Sie befinden sich in einer Spielshow in der es ein Auto zu gewinnen gibt. Dem Spielablauf liegen folgende Regelnmzugrunde:

1. Ein Auto und zwei Ziegen sind auf drei Tore verteilt, alle Tore sind verschlossen, sodass Auto und Ziegen nicht sichtbar sind.
2. Sie wählen ein Tor aus, welches aber vorerst verschlossen bleibt.
3. Falls Sie das Tor mit dem Auto gewählt haben, dann öffnet der Moderator eines der beiden anderen Tore, hinter dem sich immer eine Ziege befindet. Falls Sie ein Tor mit einer Ziege gewählt haben, dann öffnet der Moderator dasjenige der beiden anderen Tore, hinter dem die zweite Ziege steht.
4. Der Moderator bietet Ihnen an, die erste Entscheidung zu überdenken und das andere ungeöffnete Tor zu wählen.
5. Das letztlich gewählte Tor wird geöffnet und Sie gewinnen das Auto, falls es sich hinter diesem Tor befindet.

Um im vorletzten Schritt die richtige Entscheidung zu treffen überlegen wir uns folgendes: Wir bezeichnen das von Ihnen gewählte Tor mit 1 und betrachten die Ereignisse

$$B_i = \text{“Auto ist hinter Tor i.”} \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$A_j = \text{“Moderator öffnet Tor j.”} \qquad (j = 2, 3).$$

a) Welche Wahl der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(B_i)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ sowie $\mathbb{P}(A_j|B_i)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $j \in \{1, 2\}$ ist angebracht?

b) Berechnen Sie mit der Bayes-Formel $\mathbb{P}(B_1|A_j)$ für $j \in \{2, 3\}$. Hat das Öffnen des anderen Tores mit einer Ziege dahinter die Wahrscheinlichkeit verändert, dass sich das Auto hinter Tor 1 befindet?

c) Drücken Sie das Ereignis "Auto gewonnen" mit Hilfe von A_i und B_j aus in den beiden Fällen, wo Sie in Schritt 4 immer, bzw. nie wechseln.

d) Würden Sie im vorletzten Schritt das Tor wechseln?

Abgabe: Dienstag, den 16.03.2021, online über das SAMUp-Tool.