Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 4

1. Seien X_1, X_2 diskrete unabhängige Zufallsvariablen mit Werten $\mathbb{N}_0$.

   a) Zeigen Sie die Faltungsformel

   $$\forall\, k \in \mathbb{N}_0 \colon \qquad P[X_1 + X_2 = k] = \sum_{j=0}^{k} P[X_1 = j] P[X_2 = k - j]. \tag{1}$$

   b) Die Momenterzeugende Funktion einer diskreten Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{N}_0$ ist definiert als

   $$\forall\, s \in \mathbb{R} \colon \qquad M_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} P[X = k]. \tag{2}$$

   Zeigen sie

   $$\forall\, s \in \mathbb{R} \colon \qquad M_{X_1+X_2}(s) = M_{X_1}(s) M_{X_2}(s). \tag{3}$$

2. Wir betrachten eine mehrdimensionale symmetrische Irrfahrt. Seien $d, N \in \mathbb{N}^+$ und

   $$\begin{aligned}
   \Omega &= \big(\underbrace{\{-1,+1\} \times \ldots \times \{-1,+1\}}_{d-\text{mal}}\big)^N = \left\{(\omega_{i,j})_{1 \le i \le d, 1 \le j \le N} \,:\, \omega_{ij} = \pm 1\right\}, \\
   \mathcal{A} &= \{A \,:\, A \subseteq \Omega\}, \\
   \mathbb{P} &= \text{die Gleichverteilung auf } \Omega, \\
   S_n &= (S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(d)}),\ S_0 = (0, \ldots, 0),
   \end{aligned}$$

   wobei

   $$S_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j} \qquad\qquad (1 \le i \le d).$$

   Ferner sei R_n die Anzahl der Besuche in $(0, \ldots, 0)$ bis zur Zeit n.

   a) Interpretieren Sie $(S_0, \ldots, S_N)$ als Pfad einer Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$. Zeichnen Sie insbesondere den Pfad, der zu

   $$\begin{aligned}
   &d = 2, N = 5 \quad \text{und} \\
   &\omega = ((1,1),\ (1,-1),\ (-1,-1),\ (1,1),\ (-1,1))
   \end{aligned}$$

   gehört.

   b) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = (0, \ldots, 0))$.
   Hinweis: Benutzen Sie die Formel von Stirling.

c) Benutzen Sie b) um zu entscheiden, ob

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[R_n]$$

endlich oder unendlich ist.
Hinweis: Schreiben sie R_n als eine Summe von Indikatorfunktionen.

3. **Das Ruinproblem.** Arno und Benno spielen folgendes Spiel: In jeder Runde wird eine faire Münze geworfen. Erscheint Kopf, so zahlt Benno einen Franken an Arno, und umgekehrt bei Zahl. Arnos bzw. Bennos Vermögen vor der ersten Runde beläuft sich auf a bzw. b Franken (a, $b \in \mathbb{N}$). Das Spiel geht zu Ende, wenn einer der beiden kein Geld mehr hat, spätestens aber nach n Runden. Es bezeichne p_n bzw. q_n die Wahrscheinlichkeit, dass Arno bzw. Benno nach diesem Spiel ruiniert ist.

   a) Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty}(p_n + q_n) = 1$.

   b) Berechnen Sie den Grenzwert $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.
   Hinweis: Betrachten Sie die Stoppzeit

$$T_n := \min\Big\{n, \min\big\{k > 0 | S_k \in \{-a, b\}\big\}\Big\}$$

   und wenden Sie den Stoppsatz (Satz 3.12) an.

4. Betrachte das folgende Spielsystem V : “Start mit dem Einsatz 1 Franken; sukzessives Verdoppeln des Einsatzes bis zur ersten 1, dann Spielabbruch; jedoch spätestens Abbruch nach n Spielen.”

   a) Berechne die Verteilung des Gewinns $(V \cdot S)_n$ bei diesem Spielsystem: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, einen Verlust zu erleiden?

   b) Berechne den Erwartungswert und die Varianz des Gewinns.

Abgabe: Dienstag, den 23.03.2021, online über das SAMUp-Tool.