Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 5

1. Sei X geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, d.h. $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p$, wobei $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ..., \}$. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion *(probability generating function)* ist definiert als

$$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k)$$

   a) Berechnen Sie $G_X(z)$. Für welche $z \in \mathbb{R}$ ist $G_X(z)$ definiert?
   b) Was ist $G_X(0)$ und $G_X(1)$?
   c) Berechnen Sie $G_X'(z)|_{z=1}$. Was ist das?

   Sei $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$, wobei $X_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{Geom}(p)$. Dann ist $Y \sim \mathrm{NegBin}(r, p)$.

   d) Berechnen Sie $G_Y(z)$ und $\mathbb{E}[Y]$.

2. Betrachten Sie die exponentielle Irrfahrt $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$, $Y_n = \exp(S_n/\sqrt{N})$ (siehe Slide 57). Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[Y_N \mid Y_n] = Y_n \left(\cosh(1/\sqrt{N})\right)^{N-n} \quad \text{für} \quad n = 0, 1, ..., N.$$

   Fakultativ: Simulieren Sie eine exponentielle Irrfahrt mit $N = 100$ Zeitschritten mit einem IPython notebook und plotten Sie 10 Trajektorien.

3. Es bezeichne $\mathcal{A}$ eine nicht leere Menge von Teilmengen von Ω. Beweisen Sie, dass es eine eindeutige kleinste σ-Algebra existiert, die alle Teilmengen von $\mathcal{A}$ enthält.
   Bemerkung: Diese σ-Algebra heisst die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra und wird häufig mit $\sigma(\mathcal{A})$ bezeichnet. "Kleinste σ-Algebra" bedeutet hier, dass jede σ-Algebra, die die Mengen von $\mathcal{A}$ enthält, auch die von $\sigma(\mathcal{A})$ enthalten muss:

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{B}$$

4. a) Sei I eine (beliebige) Menge und $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf einem Raum Ω. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist.
   b) Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ zweier σ-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ genau dann eine σ-Algebra ist, wenn $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ oder $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$.
   Bemerkung: Die Aussage gilt auch für Algebren anstatt σ-Algebren. Für den Beweis sind daher nur endliche Mengenoperationen notwendig, und nicht etwa abzählbare Vereinigungen bzw. Durchschnitte.
   c) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. $A_i \in \mathcal{A},\ i \in \mathbb{N}$ entspreche dem Ereignis "im Zeitpunkt i tritt das Phänomen Ψ auf". Drücken Sie mit Hilfe der A_i die folgenden Ereignisse als Mengen $A \in \mathcal{A}$ aus:

1. "Ψ tritt nie auf"
2. "Ψ tritt immer wieder auf"
3. "Ψ tritt schliesslich nicht mehr auf"
4. "Ψ tritt genau zweimal auf"
5. "Ψ tritt höchstens in ungeraden Zeitpunkten auf"

Geben Sie an, welche dieser Ereignisse zur asymptotischen σ-Algebra gehören, die folgendermassen definiert ist

$$\mathcal{A}^* := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\{A_k : k \geq n\}).$$

Abgabe: Dienstag, den 30.03.2021, online über das SAMUp-Tool.