Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 6

1. Für $s \in (1, \infty)$ ist die **Riemann'sche Zetafunktion** gegeben durch die konvergente Reihe $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Wir wollen zeigen, dass

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - p_i^{-s}\right)}, \qquad s \in (1, \infty) \tag{1}$$

wobei $p_1, p_2, p_3, \ldots = 2, 3, 5, \ldots$ eine Durchnummerierung der Primzahlen darstellt. Sei $s \in (1, \infty)$ fix.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(N) := \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in N} \frac{1}{n^s}, \quad N \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, wobei $\mathbb{N} = 1, 2, 3, ...$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ bezeichnet (i.e. $N \subseteq \mathbb{N}$).

b) Sei p eine Primzahl $N_p := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ ist teilbar durch } p\}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(N_p)$.

c) Zeigen Sie, dass die Familie von Ereignissen $(N_p)_{p \text{ prim}}$ unabhängig ist.

d) Berechnen Sie

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p \text{ prim}} N_p^c\right)$$

mit Hilfe von c) und der Stetigkeitseigenschaften von $\mathbb{P}$ (siehe Slide 148), und folgern Sie daraus (1).

2. a) Konstruieren Sie eine Folge von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \infty$ und $\mathbb{P}(\cap_n \cup_{k \geq n} A_k) = 0$.

b) Sei $C \in (0, \infty)$ und $0 \leq \lambda_n \leq C$. Ferner seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ_n, d.h. $\mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(X_n \geq n \text{ für unendlich viele n}) = 0$$

gilt.

3. Sei $(\{0, 2\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ das Modell für den unendlichen Münzwurf mit Erfolgsparameter $p \in (0, 1)$. Wir betrachten die Zufallsvariable

$$X : \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1], \qquad \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \frac{1}{3^n}.$$

Man zeige

a) X ist messbar.

b) Die Verteilungsfunktion F von X ist stetig.

c) Es gibt disjunkte Intervalle $I_k \subseteq [0,1]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ derart, dass F konstant ist auf jedem I_k und $\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = 1$ gilt. (Wobei λ das Lebesgue-Mass bezeichnet.)

Hinweise:
- $X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \frac{1}{3^n}$.
- F ist vor allem konstant auf Intervallen die keine Werte aus dem Bild von X enthalten. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Überlegung induktiv, von Münzwurf zu Münzwurf, eine Folge von Mengen (Vereinigung von Intervallen) auf denen F konstant ist.

4. Historisch hat das sogenannte *Bertrand'sche Paradox* eine wichtige Rolle gespielt. Es geht dabei darum, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine zufällig gewählte Sehne im Einheitskreis länger als $x \in [0, 2]$ ist. Je nachdem, wie man die zufällige Wahl einer Sehne definiert, erhält man unterschiedliche Antworten. Sei λ das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^2$, für eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 < \lambda(A) < \infty$ definieren wir die Gleichverteilung $\mathbb{P}$ auf A durch

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\lambda(B \cap A)}{\lambda(A)}, \qquad \left(B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right).$$

Wir betrachten die folgenden möglichen Definitionen einer zufälligen Sehne.

a) Die beiden Endpunkte S_1, S_2 der Sehne sind gleichverteilt auf dem Kreisumfang, d.h. gleichverteilt auf $[0, 2\pi)^2$.

b) Der Mittelpunkt der Sehne ist gleichverteilt auf der Kreisscheibe.

Geben Sie für beide Möglichkeiten a) und b) den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sowie die Zufallsvariable S an, welche die Länge der Sehne modelliert und berechnen Sie die Verteilungsfunktion von S sowie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\left(S > \sqrt{3}\right)$.

Abgabe: Dienstag, den 13.04.2021, online über das SAMUp-Tool.