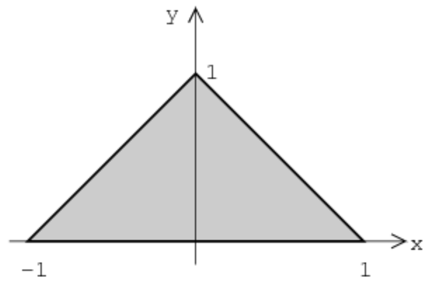
Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 7

1. Die gemeinsame Dichte der beiden Zufallsvariablen X und Y sei konstant gleich c auf dem grauen Dreieck und 0 ausserhalb.



   a) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichtefunktion $f_{X,Y}$.

   b) Bestimmen Sie die beiden Randdichten.

   c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \operatorname{Var}(X)$ und $\operatorname{Var}(Y)$.

   d) Bestimmen Sie die Kovarianz von X und Y. Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie die Antwort.

2. Eine wichtige Verteilung zur Modellierung von positiven Zufallsvariablen ist die sogenannte *lognormal Verteilung*. Man nennt eine positive Zufallsvariable Y *lognormal verteilt* wenn $X := \log(Y)$ normalverteilt ist ($\log$ = Logarithmus zur Basis e), oder anders ausgedrückt, wenn sich Y in der Form $Y = \exp(X)$ schreiben lässt, wobei X normalverteilt ist.

   a) Berechnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion und die Dichte der lognormal verteilten Zufallsvariable $Y = \exp(X)$, wobei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

   b) Begründen Sie mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung, ob $\mathbb{E}[\exp(X)]$ oder $\exp(\mathbb{E}[X])$ grösser ist (für beliebiges X mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$). Berechnen Sie danach $\mathbb{E}[\exp(X)]$ für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

   c) Sei $\log(Y) \sim \mathcal{N}(4.0, 0.5)$, berechnen Sie $\mathbb{P}(Y > 100)$ und das 5%-Quantil von Y.
   Hinweis: Benützen Sie dazu das Computer Algebra System Ihrer Wahl, oder die Tabelle für die Standardnormalverteilung.

3. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Wir definieren die *charakteristische Funktion von X* durch

$$\begin{aligned}\varphi_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ t &\longmapsto \varphi_X(t) := \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx),\end{aligned}$$

   wobei μ die Verteilung von X ist (die letzte Gleichung folgt aus dem Transformationssatz für Masse). Sie stellt ein wichtiges analytisches Hilfsmittel dar, welches die Verteilung einer Zufallsvariable eindeutig bestimmt (charakterisiert)..

a) Zeigen Sie folgende Eigenschaften:
   - $\varphi_X(0) = 1$,
   - $|\varphi_X(t)| \leq 1$,
   - φ_X ist stetig, und
   - $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass falls das n-te Moment von X existiert, d.h. $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$, dann ist φ_X n-mal differenzierbar, und für alle $k \leq n$ gilt

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k e^{itX}\right]$$

(insbesondere $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left[X^k\right]$).

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage durch Induktion, verwenden Sie dabei $\left|\frac{e^{i\alpha}-1}{\alpha}\right| \leq 1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ und den Satz von der dominierten Konvergenz.

c) Leiten Sie eine Differentialgleichung für die charakteristische Funktion φ der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung unter Verwendung von b) und partieller Integration her, und berechnen Sie daraus φ.

4. **Exponentielle Chebyshev-Ungleichung, Laplacetransformierte der Poissonverteilung.**

a) Es sei X eine Zufallsvariable und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \inf_{s \geq 0} e^{-sa}\mathbb{E}[e^{sX}]. \tag{1}$$

b) Die Anzahl N der Autounfälle in Zürich während eines Jahres sei poissonverteilt zum Parameter λ, d.h.

$$\mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\ .$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^{sN}]$ für $s \in \mathbb{R}$.

c) Finden Sie mit der Ungleichung (1) eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens m Autounfälle stattfinden. Für welche Werte von (λ, m) ist diese Schranke nicht trivial (also kleiner als 1)?

Abgabe: Dienstag, den 20.04.2021, online über das SAMUp-Tool.