Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 8

1. Seien $X_2, X_3, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen. Wir nehmen an, dass für alle $n \in \{2, 3, \ldots\}$
$$\mathbb{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n \log n} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$
Zeigen Sie, dass die Folge $(X_n)_{n \geq 2}$ das schwache, aber nicht das starke Gesetz der grossen Zahlen erfüllt.

2. Wir betrachten eine standard-normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
   a) Zeigen Sie, dass die Dichte von $Y := X^2$ von der Form $f_Y(y) = c\, e^{-y/2}\, y^{-1/2}\, \mathbf{1}_{\{y>0\}}$ für ein $c > 0$ ist.
   Bemerkung: Die Verteilung Y heisst **Chiquadrat-Verteilung** mit einem Freiheitsgrad und man schreibt $Y \sim \chi_1^2$.
   b) Seien Y_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, i.i.d. χ_1^2-verteilt. Zeigen Sie, dass die Dichte f_2 der Zufallsvariable $Y_1 + Y_2$ die Form $f_2(x) = c_2\, e^{-x/2}\, \mathbf{1}_{\{x>0\}}$ für ein $c_2 > 0$ hat.
   Bemerkung: Die Verteilung von $Y_1 + Y_2$ heisst Chiquadrat-Verteilung mit zwei Freiheitsgraden und man schreibt $Y \sim \chi_2^2$.
   c) Beweisen Sie via Induktion, dass die Summe $Y_1 + \cdots + Y_n$ die Dichte
   $$f_n(x) = c_n\, x^{n/2-1}\, e^{-x/2}\, \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$
   für ein $c_n > 0$ hat.
   Bemerkung: Die Verteilung von $Y_1 + \cdots + Y_n$ heisst Chiquadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden und man schreibt $Y \sim \chi_n^2$.

3. Die Zufallsvariable X_ν sei χ_ν^2-verteilt mit $\nu \in \mathbb{N}$. Das heisst insbesondere, dass $\mathbb{E}[X_\nu] = \nu$ und $\operatorname{Var}(X_\nu) = 2\nu$ gilt.
   a) Geben Sie mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit
   $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_\nu}{\nu} - 1\right| \leq 0.5\right)$$
   an. Welchen Wert hat die Schranke für $\nu = 40$?
   b) Berechnen Sie für $\nu = 40$ die obige Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes. Vergleichen Sie diesen Wert mit der in Teilaufgabe a) erhaltenen Schranke.

4. Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$
Hinweis: Betrachten Sie i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit $X_i \sim \mathrm{Poi}(1)$ und setzen Sie $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

5. Eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable, $X \sim \text{Cauchy}$, hat die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Seien nun $X, Y \sim$ i.i.d. Cauchy. Zeigen Sie, dass $(X+Y)/2 \sim \text{Cauchy}$.

Hinweis: Benutze den Residuensatz, um charakteristische Funktionen zu berechnen.

Abgabe: Dienstag, den 27.04.2021, online über das SAMUp-Tool.