Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 9

1. Für eine Luftseilbahn soll die obere Schranke n für die Anzahl der zu befördernden Passagiere pro Fahrt so bestimmt werden, dass mit der Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 die Gesamtnutzlast $G = 9000\,kg$ nicht überschritten wird. Die Zufallsvariable X bezeichne das Gewicht einer zufällig ausgewählten Person in Winterbekleidung und mit Skiausrüstung. Wir nehmen an, dass X die folgende Dichte $f(x)$ besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{40}x - c & \text{falls } 40 \le x \le 80 \\ -\frac{c}{40}x + 3c & \text{falls } 80 \le x \le 120 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   a) Bestimmen Sie c und berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}(X)$.

   b) Bestimmen Sie n mittels Approximation durch die Normalverteilung.

2. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ und $\mathrm{Var}(X) > 0$. Die Korrelation von X und Y sei mit $\rho := \rho(X, Y)$ bezeichnet. Wir wollen Y mit einer linearen Prognosefunktion $\alpha X + \beta$ voraussagen. Und zwar so, dass der mittlere quadratische Fehler minimal wird, d.h. $\mathbb{E}[(Y - \text{Prognose})^2]$ soll möglichst klein sein.

   a) Bestimmen Sie β so, dass $\mathbb{E}[(Y-\beta)^2]$ minimal wird und geben Sie das zugehörige Minimum an.

   b) Bestimmen Sie α und β so, dass $\mathbb{E}[(Y - (\alpha X + \beta))^2]$ minimal wird und geben Sie auch hier das zugehörige Minimum an.

   c) Zeigen Sie, dass das Verhältnis $\frac{\text{Minima b)}}{\text{Minima a)}}$ durch $1 - \rho^2$ gegeben ist. Wie ist dieses Ergebnis zu interpretieren bzw. wann macht es Sinn die Zufallsvariable X in die Prognose für Y einzubeziehen?

   d) Folgeren Sie aus Punkt b), dass

$$|\rho| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R} : Y \overset{\text{f.ü.}}{=} \alpha X + \beta.$$

3. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$ wobei $\lambda|_{[0,1]}$ das Lebesguemass auf dem Intervall $[0,1]$ bezeichnet, und eine Folge von Zufallsvariablen $X_n(\omega) = \mathbf{1}_{A_n}(\omega)$ mit $A_n \in \mathcal{B}([0,1])$.

   a) Was soll $(A_n)_n$ erfüllen, damit $X_n(\omega) \xrightarrow{P} 0$?

   b) Drücken Sie das Ereignis $\{\omega | X_n(\omega) \to 0\}$ mit Hilfe der Ereignisse A_n aus.

   c) Geben Sie eine Folge A_n an, sodass $X_n \xrightarrow{P} 0$ aber $\{\omega | X_n(\omega) \to 0\} = \emptyset$.

4. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte f. Ferner betrachtenn wir $M_k := \max_{1 \leq i \leq k} X_i \quad (k \leq n)$.

   a) Bestimmen Sie die kumulative Verteilungsfunktion und die Dichte von M_n.

   b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X_n > M_{n-1})$ (d.h. die Wahrscheinlichkeit dass X_n ein neuer Rekord ist), entweder

      i) mit einem Symmetrieargument, oder

      ii) indem Sie die gemeinsame Dichte von X_n und M_{n-1} über das Gebiet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq y\}$ integrieren.

5. Sei $f\colon [a, b]^d \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $(X_n)_n$ eine Folge von i.i.d. uniform verteilten Zufallsvariablen auf der Menge $[a, b]^d$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(b-a)^d}{N} \sum_{i=1}^{N} f(X_i) = \int_{[a,b]^d} f(x)\, dx \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

6. **Progammieraufgabe**: Wir wollen in dieser Aufgabe die Monte-Carlo-Methode von Aufgabe 5 verwenden, um das Integral

$$\int_{[-0.5,0.5]^{25}} \arctan(x_1 + \cdots + x_{25})\, d(x_1, \ldots, x_{25}) \tag{1}$$

   numerisch zu approximieren.

   a) Berechnen Sie die exakte Lösung des Integrals in (1).

   b) Erzeugen Sie N uniform verteilte Zufallsvariablen auf der Menge $[-0.5, 0.5]^{25}$ und approximieren sie das Integral in (1) mit der Monte-Carlo Methode von Aufgabe 5. Plotten Sie den mittleren Fehler für $N = 10, 10^2, \ldots, 10^5$.

   Hinweis: Um den mittleren Fehler der Monte-Carlo methode zu analysieren, können Sie wiederum die Monte-Carlo Methode benutzen.

Abgabe: Dienstag, den 04.05.2021, online über das SAMUp-Tool.