Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 10

1. Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. Bernoulli-verteilte Zufallsvariablem mit unbekanntem Parameter $p \in [0,1]$. Wir betrachten zwei Schätzer für p. Der erste Schätzer ist $T_n^{(1)}(X_1,\dots,X_n) = X_1$. Der zweite Schätzer ist $T_n^{(2)}(X_1,\dots,X_n) = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

   a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz beider Schätzer als Funktion von n. Kommentieren Sie dann das Resultat.

   b) Sind die Schätzer erwartungstreu?

   c) Sind die Schätzer konsistent?

2. Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. exponential verteilte Zufallsvariablem mit unbekanntem Parameter $\lambda \in (0,\infty)$. Der Momentenschätzer für λ ist gegeben durch $\Lambda_n(X_1,\dots,X_n) = \frac{1}{\overline{X}_n} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$.

   a) Ist dieser Schätzer erwartungstreu?

   b) Ist dieser Schätzer konsistent?

3. Um die Anzahl N der Fische in einem Teich zu schätzen, werden 5 verschiedene Fische eingefangen, markiert und wieder in den Teich eingesetzt. Man nimmt an, dass sich nach einer gewissen Zeit die markierten Fische mit den übrigen Fischen gut vermischt haben und fängt dann 11 Fische. Von diesen 11 Fischen sind 3 markiert und 8 nicht markiert. Um die gesamte Anzahl Fische N zu schätzen berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Beobachtung als Funktion von N und nehmen Sie als Schätzer das N^* für welches diese Wahrscheinlichkeit maximiert wird. (So ein Schätzer wird Maximum-Likelihood-Schätzer genannt)

   Welches N^* erhalten Sie?

4. *Vergleich von arithmetischem Mittel und Stichprobenmedian*
   Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$-verteilt, wobei μ und σ^2 unbekannt sind. Wir betrachten zwei Schätzer für μ,

$$T_{2n+1}^{(1)}(X_1,\dots,X_{2n+1}) = \frac{1}{2n+1}\sum_{i=1}^{2n+1} X_i$$
$$T_{2n+1}^{(2)}(X_1,\dots,X_{2n+1}) = X_{(n+1)},$$

   wobei $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(2n+1)}$ die der Grösse nach geordneten ersten $(2n+1)$-Werte bezeichnet.

   a) Berechnen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes die Werte $c_n^{(1)}$ und $c_n^{(2)}$ so dass

$$\mathbb{P}\left(\left|T_{2n+1}^{(i)}(X_1,\dots,X_{2n+1}) - \mu\right| \le c_n^{(i)}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 95\%.$$

b) Berechnen Sie ein $q \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$\frac{c_{qn}^{(2)}}{c_n^{(1)}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Wie kann man q in Worten interpretieren?

Abgabe: Dienstag, den 11.05.2021, online über das SAMUp-Tool.