Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 11

1. Seien $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichte

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} (\vartheta - 1)x^{-\vartheta} & \text{falls } x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\vartheta \in (1, \infty)$ ein unbekannter Parameter ist.

a) Berechnen Sie den Maximum Likelihood Schätzer T_n für ϑ, basierend auf n Beobachtungen.

b) Zeigen Sie, dass $(T_n)_n$ konsistent ist.

2. Eine Tankstelle veranschlagt für einen Ölwechsel mindestens α Minuten. Die tatsächlich benötigte Zeit X variiert natürlich im Bereich $X \geq \alpha$ und ist von Kunde zu Kunde verschieden. Man kann jedoch annehmen, dass diese Zeit durch eine exponential-verteilte Zufallsvariable gut wiedergegeben wird. Die Zufallsvariable X besitze somit die Dichtefunktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{\alpha - t} & \text{falls } t \geq \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

d.h. $X = \alpha + Z$, wobei $Z \sim \text{Exp}(1)$. Um α schätzen zu können, wurde von 10 zufällig ausgewählten Kunden die für den Ölwechsel benötigte Arbeitszeit in Minuten notiert:

$$4.2, 3.1, 3.6, 4.5, 5.1, 7.6, 4.4, 3.5, 3.8, 4.3.$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für den unbekannten Parameter α.

3. **Vergleich zweier Schätzmethoden.** Während der Vorbereitungszeit auf die mündliche Prüfung kommunizieren Arno und Benno per E-mail, um auftretende Probleme zu bereinigen. Aufgrund der Tageszeiten zu denen Benno Meldungen abschickt, hat Arno den Verdacht, dass Benno mehr arbeitet als er. Aus den Tageszeiten der letzten zehn Meldungen (umgerechnet in Stunden)

$$10.55, 14.9, 11.2, 18.85, 9.75, 11.5, 16.1, 14.4, 9.2, 12.95$$

will Arno Bennos Arbeitszeiten schätzen. Zu diesem Zweck nimmt er an, dass Benno jeden Tag zur Zeit a anfängt zu lernen und zur Zeit b aufhört, und dass die Zeiten, zu denen die E-mails abgeschickt werden, unabhängig und alle uniform-verteilt sind auf dem Intervall $[a, b]$. Schätzen Sie die Parameter a und b mit

a) der Maximum-Likelihood-Methode, und

b) der Momenten-Methode, d.h. finden Sie die Parameter a und b, für die

$$\text{Erwartungswert} = \text{empirisches Mittel } \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

und

$$\text{Varianz} = \text{Stichprobenvarianz } s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

gilt.

Sind diese Schätzungen vernünftig?

Abgabe: Dienstag, den 18.05.2021, online über das SAMUp-Tool.