

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 12

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Verteilen eines Jasskartenspiels (bestehend aus 4 Farben, jeweils von der Sechs bis zum As) auf vier Spielerinnen eine Spielerin alle vier Bauern erhält, ist $\frac{8}{935} \approx \frac{1}{120}$. An einem Jassabend werden die Karten 60 mal ausgeteilt.
 - a) Sei X die Anzahl der Austeilungen, bei denen eine Spielerin alle vier Bauern erhält. Welche Verteilung hat X ? Durch welche andere Verteilung kann man diese sehr gut annähern? Berechnen Sie $\mathbb{P}[X = 0]$ exakt und mit dieser Näherung.
 - b) Der tatsächlich beobachtete Wert an diesem Abend ist $x = 3$. Berechnen Sie $\mathbb{P}[X = 3]$ und $\mathbb{P}[X \geq 3]$ mit der Näherung. Kann man das Ereignis noch als "reinen Zufall" betrachten, oder ist da etwas nicht mit rechten Dingen zugegangen?

2. Zufällig aus einer Population auszuwählende Individuen haben unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit p eine interessierende Eigenschaft "Erfolg". Wir schätzen den Erfolgsparameter $p \in (0, 1)$ mit zwei verschiedenen Experimenten:

A : n Individuen, $X =$ Anzahl Erfolge,

B : n Gruppen mit jeweils c Individuen, $X =$ Anzahl Gruppen mit mindestens 1 Erfolg.

Die zweite Versuchsanordnung ist naheliegend, wenn es leicht ist, Individuen für einen Test zu finden, der Test selber aber aufwendig ist (Bsp.: Schätzung des Anteils an Insekten, die einen bestimmten Krankheitserreger auf sich tragen).

- a) Bestimmen Sie die Verteilung von X bei Experiment A und B .
 - b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für p in den beiden Experimenten.
 - c) Sind die Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu in Experiment A und B ?
 - d) Berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler $\mathbb{E}_p [(T - p)^2]$ für $p = 0.2, n = 5, c = 2$ in beiden Fällen und kommentieren Sie das Ergebnis.
3. Hundert Würfe einer Münze haben sechszigmal Kopf ergeben. Kann diese Münze fair sein?
 - a) Führen Sie einen Test zum 1%-Niveau durch. Sollte dieser Test ein- oder zweiseitig sein?
 - b) Wie oft darf Kopf in hundert Würfeln höchstens auftreten, so dass wir die Annahme, dass die Münze fair ist, nicht verwerfen müssen?
 - c) Bestimmen Sie alle Werte p_0 , sodass die Nullhypothese "Wahrscheinlichkeit für Kopf= p_0 " auf dem 5% Niveau nicht verworfen wird.

Hinweis: Verwenden Sie den Zentralen Grenzwertsatz, um die benötigten Wahrscheinlichkeiten zu approximieren.

4. In einer Studie über die Zuverlässigkeit von Kugellagern wurden von zwei verschiedenen Typen je 10 Stück getestet. Die Anzahl Umdrehungen (in Millionen) waren:

Typ I	3.03	5.53	5.60	9.30	9.92	12.51	12.95	15.21	16.04	16.84
Typ II	3.19	4.26	4.47	4.53	4.67	4.69	12.78	6.79	9.37	12.75

Vor der Durchführung des Versuchs war nicht klar, welcher Typ wohl zuverlässiger ist.

- a) Handelt es sich um einen gepaarten oder um einen ungepaarten Vergleich?
- b) Führen Sie den entsprechenden t-Test für die Nullhypothese “erwartete Anzahl Umdrehungen bis zum Ausfall sind gleich für beide Typen” auf dem 5%-Niveau durch.

Abgabe: Dienstag, den 25.05.2021, online über das SAMUp-Tool.