Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 13

1. Wir wollen den Effekt von Ausreisser auf Vertrauensintervalle untersuchen. Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ bei unbekanntem σ.

   a) Geben Sie das zweiseitige Vertrauensintervall für das unbekannte μ zum Niveau α an.

   b) Wie verhält sich das Vertrauensintervall für $x_1 \to \infty$ bei festen $x_2, \ldots, x_n$? Hinweis: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt $\sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 + n(c - \bar{x}_n)^2$.

2. Betrachten Sie die Nullhypothese $X \sim f(x)dx$ und die Alternative $X \sim f(x-1)dx$ in den beiden Fällen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

   und bestimmen die qualitative Form des Verwerfungsbereichs beim Likelihood-Quotienten-Test (Lemma von Neyman-Pearson) in den beiden Fällen. Kommentieren Sie den Unterschied.

3. Wir betrachten die beiden Verteilungen $\mu_0 = \text{Uniform}(0, 1)$ und $\mu_1 = \text{Uniform}(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

   a) Geben Sie für jedes $\alpha \in (0, 1)$ einen mächtigsten Test zum Niveau α an, der (150) und (151) in den Slides erfüllt. Ist ein solcher Test eindeutig?

   b) Zeigen Sie, dass man für gewisse α's einen mächtigsten Test φ' konstruieren kann, der (150) nicht erfüllt.

4. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch $\sim F$-verteilte Zufallsvariablen wobei F absolut stetig ist. Der Vorzeichentest ist ein Test der die Nullhypothese, dass der Median von F gleich einem vorgegebenen Wert m ist, d.h.

$$F^{-1}(\tfrac{1}{2}) = m.$$

   Benutzen Sie den Dualitätssatz (S. 408 in den Slides), um ein Vertrauensintervall für den Median von F zum Niveau 95% zu konstruieren.

Abgabe: Dienstag, den 01.06.2021, online über das SAMUp-Tool.