Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 14

1. Die Zeitschrift “Gemüsetest” testet den Wahrheitsgehalt der folgenden Werbeaussagen:

   i. Gemüsehändler Hase behauptet seine Karotten seien im Durchschnitt mindestens $30cm$ lang.

   ii. Gleichzeitig preist er seine Kartoffeln der Sorte “Pellworm” als ideale Pellkartoffeln an. Sie seien mit einem durchschnittlichen Gewicht von $50g$ weder zu dick noch zu dünn.

   iii. Konservenfabrikant Hamster wirbt für seine extrazarten jungen Erbsen mit der Garantie, die durchschnittliche Dicke der jungen Erbsen betrage höchstens $3mm$.

   iv. Er behauptet auch, dass der Anteil von holzigen Spargeln in seinen Konserven unter 0.3% liege.

   v. Ausserdem lobt er die ausgewogene Mischung seiner “Erbsen mit Karotten”, die genau 40% Gewichtsanteil betrage.

   a) Geben Sie jeweils an, ob ein linksseitiger, ein rechtsseitiger oder ein zweiseitiger Test nötig ist, um den Wahrheitsgehalt[1] der Aussagen zu testen, und stellen jeweils Nullhypothese und Alternativhypothese auf.

   b) Die Karotten von Hase sind tatsächlich durchschnittlich 30 cm lang. In ihrem Test kommt die Zeitschrift jedoch zu dem Ergebnis, dass die Werbeaussage falsch sei. Was ist passiert? (Fehler 1. Art oder 2. Art?)

   c) Der tatsächliche Anteil an holzigen Spargeln liegt bei 2%, trotzdem akzeptiert die Zeitschrift nach ihrem Test die Aussage von Fabrikant Hamster. Warum? (Fehler 1. Art oder 2. Art?)

2. Die Firma *Runners* hat ein Sportgetränk für Marathonläufer entwickelt. Mit einem statistischen Test will sie nun untersuchen, ob das Getränk einen positiven Einfluss auf die Leistung hat (gemessen an der benötigten Zeit für den Lauf). Ein ausgewählter Läufer rennt 8-mal in einem Monat eine 15-km Probestrecke: 4-mal nach Einnahme des Getränkes (Laufzeiten $x_1, \ldots, x_n$) und 4-mal nach Einnahme eines Placebo-Getränks, das gleich schmeckt und aussieht (Laufzeiten $y_1, \ldots, y_n$). Die Reihenfolge der Verabreichung ist zufällig und dem Läufer nicht bekannt. Übertragungseffekte sind ausgeschlossen, da der Läufer maximal einmal an einem Tag die Strecke rennt.

   a) Handelt es sich um eine gepaarte oder um eine ungepaarte Stichprobe?

   b) Wie muss der zugehörige Test durchgeführt werden: einseitig oder zweiseitig?

   c) Welche der folgenden Aussagen ist die korrekte Alternativhypothese?

      i. Das Getränk hat eine Wirkung.

      ii. Das Getränk hat keine Wirkung.

      iii. Das Getränk bewirkt eine bessere Leistung.

      iv. Das Getränk bewirkt eine schlechtere Leistung.

   d) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

[1] Genauer geht es darum die Aussagen zu widerlegen, gelingt dies nicht bleibt uns wohl nichts anders übrig als die Aussage zu akzeptieren, womit noch lange nicht belegt ist, dass sie wahr sind.

i. Die Nullhypothese darf auf dem 1%-Niveau beibehalten werden, wenn der P-Wert des Tests 0.034 beträgt.
ii. Der Verwerfungsbereich wird grösser, wenn das Niveau verkleinert wird.
iii. Ein Fehler 1. Art kann nur dann eintreten, wenn die Teststatistik im Verwerfungsbereich liegt.
iv. Die Voraussetzungen der Wilcoxon-Tests sind strenger, als diejenigen vom t-Test.
v. Ein zweiseitiges 99%-Vertrauensintervall umfasst immer das entsprechende zweiseitige 95%-Vertrauensintervall.
vi. Angenommen, die Hypothese $\mu = 0$ wird zweiseitig getestet mit dem t-Test. Die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese beizubehalten, obwohl sie falsch ist, ist grösser unter der Alternativhypothese $\mu = 0.15$ als unter $\mu = 0.20$.

3. Angenommen, die Anzahl der Defekte in einer 1200-Fuss-Rolle eines Magnetaufzeichnung Bands hat eine Poisson-Verteilung, für die der Wert des Erwartungswerts θ unbekannt ist, und die a-priori-Verteilung von θ ist die Gamma-Verteilung mit den Parametern $\alpha = 3$ und $\beta = 1$. Wenn fünf Rollen dieses Bandes zufällig ausgewählt und untersucht werden, sind die Anzahl der auf den Rollen gefundenen Defekter $2, 2, 6, 0$ und 3.

   a) Wie lautet die a-posteriori-Dichte von θ?
   b) Wie lautet der Bayes-Schätzer von θ, wenn der mittlere quadratische Fehler verwendet wird?

4. Die Australier Mr. Smith und Dr. Thurston streiten sich über das Durchschnittsgewicht von *Strausseneiern*. Beide sind damit einverstanden, das Gewicht approximativ als normalverteilt aufzufassen. Mr. Smith behauptet aber, das mittlere Gewicht sei 1100g, während Dr. Thurston darauf besteht, dass die Eier schwerer seien, und zwar im Schnitt 1200g. Um ihren Streit beilegen zu können, reisen die beiden nach Afrika, um in der Savanne Strausseneier zu suchen. Weil diese aber meistens gut versteckt sind, finden sie nur acht, und zwar mit folgenden Gewichten (in g):

$$1090, 1150, 1170, 1080, 1210, 1230, 1180, 1130.$$

Sie wollen sich auf *einen* Test einigen, der ihren Streit über das mittlere Gewicht von Strausseneiern entscheiden soll. Deren Gewicht (in g) kann approximativ als normalverteilte Zufallsgrösse mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Streuung $\sigma = 55$ auffassen.

   a) Testen Sie die Hypothese $\mu_0 = 1100$ gegen die Alternative $\mu_1 = 1200$ zum Niveau 2.5% mit einem mächtigsten Test.
   b) Wie viele Beobachtungen (d.h. Strausseneier) muss man mindestens haben, damit die Macht des Tests grösser als 97.5% wird?
   c) Bestimmen Sie für das n aus b) die Machtfunktion $\beta(\mu)$ des Tests für alle

$$\mu \in \{1000, 1050, 1100, 1150, 1200, 1250, 1300\},$$

   und zeichnen Sie ihren Graphen.
   d) Bestimmen Sie das realisierte 97.5%- Vertrauensintervall für μ.
   e) Kommentieren Sie die Ergebnisse.

Abgabe: Dienstag, den 08.06.2021, online über das SAMUp-Tool.