Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

Herbstsemester 2021

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Serie 1

Aufgabe 1.1

Multiple Choice: Online abzugeben.
Man löse die folgenden zwei Gleichungssysteme mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & b_3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & b_4 \end{array}$$

1.1a) Für $b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 2$ ist die Lösung:

(i) $x_4 = \frac{7}{4},\ x_3 = -3,\ x_2 = \frac{3}{2},\ x_1 = 1$

(ii) $x_4 = \frac{6}{4},\ x_3 = -2,\ x_2 = \frac{5}{2},\ x_1 = 2$

(iii) $x_4 = \frac{5}{4},\ x_3 = -4,\ x_2 = \frac{7}{2},\ x_1 = 3$

(iv) $x_4 = \frac{3}{4},\ x_3 = -6,\ x_2 = \frac{9}{2},\ x_1 = 4$

1.1b) Für $b_1 = 0,\ b_2 = -3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1$ ist die Lösung:

(i) $x_4 = -5,\ x_3 = 14,\ x_2 = -7,\ x_1 = -11$

(ii) $x_4 = -4,\ x_3 = 13,\ x_2 = -6,\ x_1 = -10$

(iii) $x_4 = -3,\ x_3 = 12,\ x_2 = -5,\ x_1 = -9$

(iv) $x_4 = -2,\ x_3 = 11\ x_2 = -4,\ x_1 = -8$

Aufgabe 1.2

Multiple Choice: Online abzugeben. Eventuell sind mehrere Antworten richtig.
Wir betrachten im Folgenden ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen, n Spalten und Rang r.

1.2a) Das Gleichungssystem ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn

(i) $m > n$

(ii) $r < m$

1.2b) Ein homogenes Gleichungssystem hat genau dann *keine* nicht-trivialen Lösungen, wenn

(i) $r = m$

(ii) $r = n$

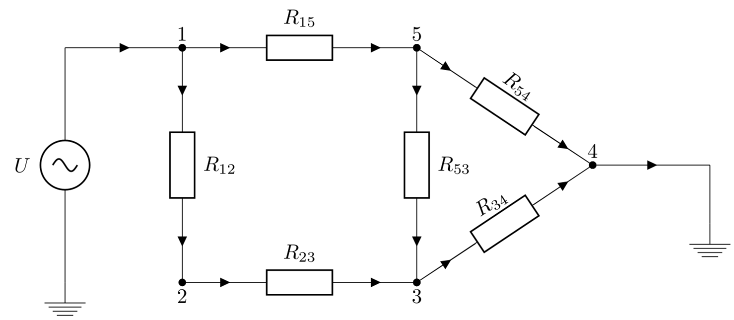
1.2c) Sei $m = n$. Das zugehörige homogene Gleichungssystem habe nicht-triviale Lösungen. Dann

(i) gibt es für beliebige rechte Seiten mindestens eine Lösung.

(ii) gibt es rechte Seiten, so dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe 1.3

Wir betrachten den folgenden Schaltplan:



Aufgrund des Ohmschen Gesetzes haben wir

$$I_{kj} = \frac{U_j - U_k}{R_{kj}},$$

wobei R_{jk} der Widerstand zwischen den Knoten j und k, I_{jk} die entsprechende Stormstärke und U_j die Knotenspannung ist. Wegen der Kirchhoffschen Gesetze gilt

$$\begin{aligned}
&U_1 = U,\\
&U_4 = 0,\\
&I_{12} - I_{23} = 0,\\
&I_{53} + I_{23} - I_{34} = 0,\\
&I_{15} - I_{54} - I_{53} = 0.
\end{aligned}$$

1.3a) Gegeben R_{jk} und U, schreiben Sie das lineare Gleichungssystem für U_j in Matrixform $\underline{\underline{A}}\,\underline{U} = \underline{b}$, wobei $\underline{\underline{A}}$ eine 3×3-Matrix ist und $\underline{U} := (U_2, U_3, U_5)^T$ sowie $\underline{b}$ 3×1-Vektoren sind.

1.3b) Sei nun $U = 1$ und

$$R_{12} = R_{15} = R_{23} = R_{53} = R_{54} = R_{34} = 1.$$

Berechnen Sie U_j für $j = 2, 3, 5$.

Aufgabe 1.4

1.4a) Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc}
3x_1 & + & bx_2 & + & 4x_3 & = & 5\\
3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5\\
 & & 2bx_2 & + & 2ax_3 & = & b
\end{array}$$

Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

- Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,

- Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,
- eindeutig lösbar ist,
- keine Lösung hat.

Hinweis: Benutzen Sie den Gauss-Algorithmus und führen Sie dabei geeignete Fallunterscheidungen durch.

1.4b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & ax_3 & = & 0 \end{array}$$

eine nichttriviale Lösung (das heisst die Lösung ist ungleich Null)? Geben Sie für diesen Fall die Lösungsmenge an.
Hinweis: Durch Vertauschen von zwei Zeilen kann hier beim Gauss-Algorithmus eine mögliche Division durch 0 verhindert werden.

Aufgabe 1.5

Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, mit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -13 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.

Abgabe:

In der Woche vom 04. Oktober 2021 beim *zugeteilten* Assistenten.