Dr. V. Gradinaru
S. Lanthaler

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra für D-ITET, RW

Beispiellösung für Serie 1

Aufgabe 1.1

Multiple Choice: Online abzugeben.
Man löse die folgenden zwei Gleichungssysteme mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & b_3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & b_4 \end{array}$$

1.1a) Für $b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 2$ ist die Lösung:

(i) $x_4 = \frac{7}{4},\ x_3 = -3,\ x_2 = \frac{3}{2},\ x_1 = 1$
(ii) $x_4 = \frac{6}{4},\ x_3 = -2,\ x_2 = \frac{5}{2},\ x_1 = 2$
$\surd$ (iii) $x_4 = \frac{5}{4},\ x_3 = -4,\ x_2 = \frac{7}{2},\ x_1 = 3$
(iv) $x_4 = \frac{3}{4},\ x_3 = -6,\ x_2 = \frac{9}{2},\ x_1 = 4$

1.1b) Für $b_1 = 0,\ b_2 = -3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1$ ist die Lösung:

$\surd$ (i) $x_4 = -5,\ x_3 = 14,\ x_2 = -7,\ x_1 = -11$
(ii) $x_4 = -4,\ x_3 = 13,\ x_2 = -6,\ x_1 = -10$
(iii) $x_4 = -3,\ x_3 = 12,\ x_2 = -5,\ x_1 = -9$
(iv) $x_4 = -2,\ x_3 = 11\ x_2 = -4,\ x_1 = -8$

Lösung: Mit dem Gauss–Algorithmus erhält man für die beiden Fälle:

$$\begin{array}{cccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 18 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 12 & -5 & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1a & 1b \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & -10 \end{array}$$

Es folgt durch Rückwärtseinsetzen:

a) $x_4 = \frac{5}{4},\ x_3 = -4,\ x_2 = \frac{7}{2},\ x_1 = 3$, also die dritte Antwort.

b) $x_4 = -5,\ x_3 = 14,\ x_2 = -7,\ x_1 = -11$, also die erste Antwort.

Aufgabe 1.2

Multiple Choice: Online abzugeben. Eventuell sind mehrere Antworten richtig.
Wir betrachten im Folgenden ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen, n Spalten und Rang r.

1.2a) Das Gleichungssystem ist *nicht* für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn

√ (i) $m > n$

Denn damit ist $r \leq n < m$, und damit ist Satz 1.1 auf Seite 13 wie für die zweite Aussage anwendbar.

√ (ii) $r < m$

Siehe Satz 1.1 auf Seite 13, für $c_i \neq 0$, für mindestens ein $i = r+1, ..., m$.

1.2b) Ein homogenes Gleichungssystem hat genau dann *keine* nicht-trivialen Lösungen, wenn

(i) $r = m$

Gemäss Korollar 1.3 auf Seite 14 gibt es genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn $r < n$. Falls $m < n$, wäre das hier der Fall, aber $m < n$ steht nicht als Bedingung, deshalb ist die Aussage falsch.

√ (ii) $r = n$

Gemäss Korollar 1.3 auf Seite 14 gibt es genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn $r < n$, was bei $r = n$ nicht erfüllt ist.

1.2c) Sei $m = n$. Das zugehörige homogene Gleichungssystem habe nicht-triviale Lösungen. Dann

(i) gibt es für beliebige rechte Seiten mindestens eine Lösung.

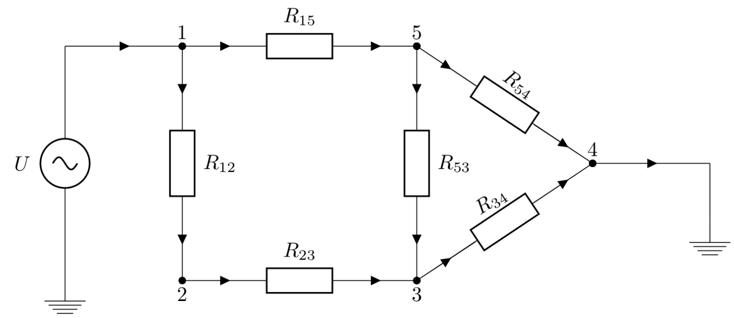
Zum Beispiel führt die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ auf ein homogenes System mit der Lösung $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Für rechte Seiten der Form $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$, $b \neq 0$ gibt es jedoch keine Lösung.

√ (ii) gibt es rechte Seiten, so dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Obiges Beispiel mit z.B. der rechten Seite $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, hat Lösungen der Form $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$.
Allgemein gilt nach Korollar 1.3 auf Seite 14, dass ein homogenes Gleichungssystem genau dann nicht-triviale Lösungen hat, wenn $r < n$. Damit haben wir $r < n$ und das homogene Gleichungssystem (das Gleichungssystem mit dem Nullvektor als rechter Seite) hat eine $n - r$-parametrige Schar von Lösungen, also insbesondere unendlich viele Lösungen. Damit ist die Aussage wahr.
Wie oben gezeigt gibt es aber auch für andere rechte Seiten unendlich viele Lösungen (nämlich für diejenigen, für welche die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind).

Aufgabe 1.3

Wir betrachten den folgenden Schaltplan:



Aufgrund des Ohmschen Gesetzes haben wir

$$I_{kj} = \frac{U_j - U_k}{R_{kj}},$$

wobei R_{jk} der Widerstand zwischen den Knoten j und k, I_{jk} die entsprechende Stormstärke und U_j die Knotenspannung ist. Wegen der Kirchhoffschen Gesetze gilt

$$\begin{aligned}
&U_1 = U,\\
&U_4 = 0,\\
&I_{12} - I_{23} = 0,\\
&I_{53} + I_{23} - I_{34} = 0,\\
&I_{15} - I_{54} - I_{53} = 0.
\end{aligned}$$

1.3a) Gegeben R_{jk} und U, schreiben Sie das lineare Gleichungssystem für U_j in Matrixform $\underline{\underline{A}}\,\underline{U} = \underline{b}$, wobei $\underline{\underline{A}}$ eine 3×3-Matrix ist und $\underline{U} := (U_2, U_3, U_5)^T$ sowie $\underline{b}$ 3×1-Vektoren sind.

Lösung: Wegen der Ohmschen und Kirchhoffschen Gesetze haben wir für den Knoten 2

$$\begin{aligned}
I_{12} - I_{23} = 0 &\Leftrightarrow \frac{U_2 - U_1}{R_{12}} - \frac{U_3 - U_2}{R_{23}} = 0\\
&\Leftrightarrow U_2\left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}}\right) - \frac{U_3}{R_{23}} = \frac{U}{R_{12}}.
\end{aligned}$$

Für den Knoten 3 bekommen wir

$$\begin{aligned}
I_{53} + I_{23} - I_{34} = 0 &\Leftrightarrow \frac{U_3 - U_5}{R_{53}} + \frac{U_3 - U_2}{R_{23}} - \frac{U_4 - U_3}{R_{34}} = 0\\
&\Leftrightarrow U_3\left(\frac{1}{R_{53}} + \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{34}}\right) - \frac{U_5}{R_{53}} - \frac{U_2}{R_{23}} = 0.
\end{aligned}$$

Ausgehend von der Gleichung für den Knoten 5 folgt

$$\begin{aligned}
I_{15} - I_{54} - I_{53} = 0 &\Leftrightarrow \frac{U_5 - U_1}{R_{15}} - \frac{U_4 - U_5}{R_{54}} - \frac{U_3 - U_5}{R_{53}} = 0\\
&\Leftrightarrow U_5\left(\frac{1}{R_{15}} + \frac{1}{R_{54}} + \frac{1}{R_{53}}\right) - \frac{U_3}{R_{53}} = \frac{U}{R_{15}}.
\end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem für U_2, U_3 und U_5 ist dann

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \left(\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{23}}\right)U_2 & & -\frac{1}{R_{23}}U_3 & & & = & \frac{U}{R_{12}} \\ -\frac{1}{R_{23}}U_2 & + & \left(\frac{1}{R_{53}}+\frac{1}{R_{23}}+\frac{1}{R_{34}}\right)U_3 & & -\frac{1}{R_{53}}U_5 & = & 0 \\ & & -\frac{1}{R_{53}}U_3 & + & \left(\frac{1}{R_{15}}+\frac{1}{R_{54}}+\frac{1}{R_{53}}\right)U_5 & = & \frac{U}{R_{15}} \end{array}\right.$$

Wir schreiben es wie folgt in Matrixform

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{23}} & -\frac{1}{R_{23}} & 0 \\ -\frac{1}{R_{23}} & \frac{1}{R_{53}}+\frac{1}{R_{23}}+\frac{1}{R_{34}} & -\frac{1}{R_{53}} \\ 0 & -\frac{1}{R_{53}} & \frac{1}{R_{15}}+\frac{1}{R_{54}}+\frac{1}{R_{53}} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_5 \end{pmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{U}{R_{12}} \\ 0 \\ \frac{U}{R_{15}} \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

1.3b) Sei nun $U = 1$ und

$$R_{12} = R_{15} = R_{23} = R_{53} = R_{54} = R_{34} = 1.$$

Berechnen Sie U_j für $j = 2, 3, 5$.

Lösung: Für $R_{12} = R_{15} = R_{23} = R_{53} = R_{54} = R_{34} = 1$ und $U = 1$ bekommt man dann das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

oder ausgeschrieben

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 2U_2 & -U_3 & & = & 1 \\ -U_2 & +3U_3 & -U_5 & = & 0 \\ & -U_3 & +3U_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus erhalten wir

$$\begin{array}{rrr|r} U_2 & U_3 & U_5 & b \\ \hline 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} U_2 & U_3 & U_5 & b \\ \hline 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{rrr|r} U_2 & U_3 & U_5 & b \\ \hline 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} & \frac{6}{5} \end{array}$$

und deshalb folgt mit Rückwärtseinsetzen $\underline{U} = \frac{1}{13}(9, 5, 6)^T$.

Aufgabe 1.4

1.4a) Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & bx_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5 \\ & & 2bx_2 & + & 2ax_3 & = & b \end{array}$$

Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

- Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,
- Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,
- eindeutig lösbar ist,
- keine Lösung hat.

Hinweis: Benutzen Sie den Gauss-Algorithmus und führen Sie dabei geeignete Fallunterscheidungen durch.

Lösung: Mit dem Gauss-Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & b & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2b & 2a & b \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & b & 4 & 5 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 2a & b \end{array} \quad (*)$$

<u>**Fall b = 0**</u>: Zeilen vertauschen:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

i) <u>$a = 0$:</u> $x_3 = s,\ x_2 = t,\ x_1 = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}s$ $\rightarrow$ 2 Parameter;
ii) <u>$a \neq 0$</u>: $x_3 = 0,\ x_2 = t,\ x_1 = \frac{5}{3}$ $\rightarrow$ 1 Parameter.

<u>**Fall b ≠ 0**</u>: $-2b$ Pivot in $(*)$:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & b & 4 & 5 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & b \end{array}$$

i) <u>$a = 0$:</u> keine Lösung;
ii) <u>$a \neq 0$</u>: $x_3 = \frac{b}{2a},\ x_2 = 0,\ x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2b}{3a}$ $\rightarrow$ eindeutig.

Also:

- Lösungen mit *zwei* freien Parametern: $a = 0,\ b = 0$
- Lösungen mit *einem* freien Parameter: $a \neq 0,\ b = 0$
- eindeutig lösbar: $a \neq 0,\ b \neq 0$
- keine Lösung: $a = 0,\ b \neq 0$.

1.4b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & ax_3 & = & 0 \end{array}$$

eine nichttriviale Lösung (das heisst die Lösung ist ungleich Null)? Geben Sie für diesen Fall die Lösungsmenge an.

Hinweis: Durch Vertauschen von zwei Zeilen kann hier beim Gauss-Algorithmus eine mögliche Division durch 0 verhindert werden.

Lösung: Mit dem Gauss-Algorithmus erhält man (mit Zeilenvertauschen):

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 2 & 0 & a & 0 \end{array} \xrightarrow[\text{1. und 3.}]{\text{Vertauschen}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & a & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow[\text{2. und 3. Zeile}]{\text{Elimination 1. Spalte}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & -a/2 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2/2 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{2. und 3.}]{\text{Vertauschen}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a^2/2 & 0 \\ 0 & a & -a/2 & 0 \end{array} \xrightarrow[\text{3. Zeile}]{\text{Elimination 2. Spalte}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & -a/2 + a^3/2 & 0 \end{array}$$

Nach Auflösen einer quadratischen Gleichung in der letzten Zeile und aufgrund vom ersten nicht-Null Element von der 1. und 2. Zeile können wir ablesen, dass es für genau $a = 0, a = 1, a = -1$ eine nichttriviale Lösung gibt, und zwar:

$$x_3 = t,\ x_2 = a^2t/2,\ x_1 = -at/2,\ \text{wobei } t \in \mathbb{R}.$$

Lösungsmenge: $\quad L = \left\{(-at/2, a^2t/2, t)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$

Aufgabe 1.5

Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, mit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -13 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.

Lösung: Für $i = 1, 2$ entspricht $Ax = b_i$ ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3. Wie in Serie 1, Aufgabe 1, kann man beide rechte Seiten im gleichen Gauss-Schema schreiben (der Hauptteil ist gleich). Es folgt:

$$\begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 5 & -13 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 15 & 10 & 5 & 15 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 5 & -13 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & 6 & 14 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 5 & -13 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{array}$$

Für b_1 folgt also:

$$\begin{aligned} &x_3 \ \text{ beliebig, also } \ x_3 = t \in \mathbb{R} \ \text{ ist ein freier Parameter,} \\ &x_2 + 6x_3 = 3 \ \Rightarrow \ x_2 = 3 - 6t, \\ &5x_1 - 13x_2 + 2x_3 = 1 \ \Rightarrow \ x_1 = (1 - 2t + 13(3 - 6t))/5 = 8 - 16t. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $Ax = b_1$ ist also

$$L_1 = \left\{(8 - 16t, 3 - 6t, t)^\top \in \mathbb{R}^3 \middle| \ t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Für b_2 folgt analog

$$\begin{aligned} &x_3 \ \text{ beliebig, also } \ x_3 = s \in \mathbb{R} \ \text{ ist ein freier Parameter,} \\ &x_2 + 6x_3 = 7 \ \Rightarrow \ x_2 = 7 - 6s, \\ &5x_1 - 13x_2 + 2x_3 = -1 \ \Rightarrow \ x_1 = (-1 - 2s + 13(7 - 6s))/5 = 18 - 16s. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $Ax = b_2$ ist somit

$$L_2 = \left\{(18 - 16s, 7 - 6s, s)^\top \in \mathbb{R}^3 \middle| \ s \in \mathbb{R}\right\}.$$