

Lernkontrolle Lineare Algebra I D-MAVT / D-MATL HS21 final Version

Aufgabe 1.1:

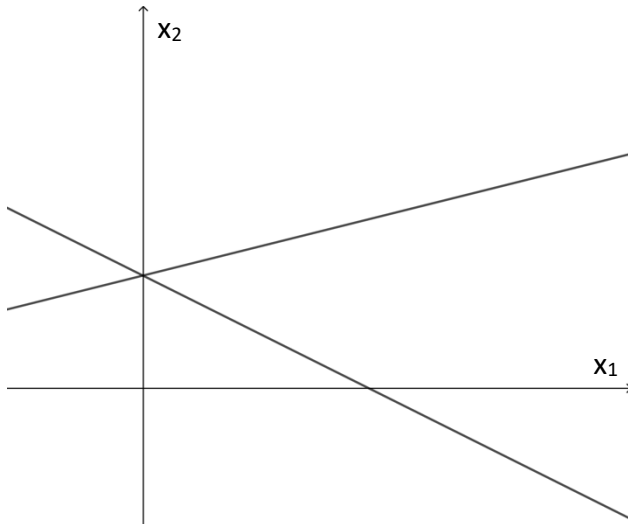
| Betrachten Sie eine beliebige 3×3 Matrix A und das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$. | | | |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. | | | |
| | Wahr | Falsch | Konfidenz |
| (a) Hat A eine Nullzeile, so besitzt $Ax = 0$ keine Lösung. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (b) Ist eine Spalte von A das Vielfache einer anderen Spalte, dann besitzt $Ax = 0$ genau eine Lösung. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (c) Sind zwei Spalten der Matrix A gleich, so gilt $\text{Rang}(A) < 3$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (d) Ist eine Zeile von A das Vielfache einer anderen Zeile, so gilt $\text{Rang}(A) < 3$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 1.2:

| Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem $Bx = c$: | | | |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| $\begin{pmatrix} 3 & 1 & b^2 \\ 0 & b-2 & 3 \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b(b-3) \end{pmatrix}.$ | | | |
| Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. | | | |
| | Wahr | Falsch | Konfidenz |
| (a) Für $b = 3$ gilt $\text{Rang}(B) = 3$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (b) Für $b = 2$ gilt $\text{Rang}(B) = 1$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (c) Für $b = 1$ besitzt $Bx = c$ unendlich viele Lösungen. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (d) Für $b = 0$ besitzt $Bx = c$ eine eindeutige Lösung. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 2.1:

In der folgenden Grafik wird ein lineares Gleichungssystem $Ax = c$ veranschaulicht, wobei A eine 2×2 Matrix ist.

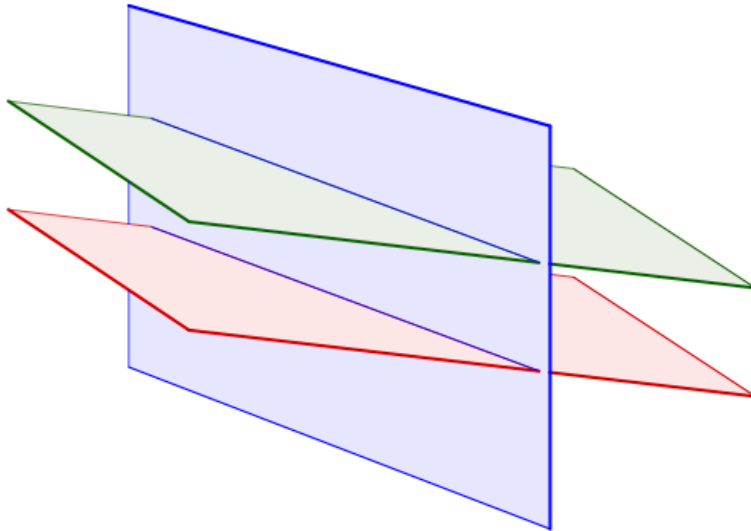


Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

| | Wahr | Falsch | Konfidenz |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| (a) Für die Matrix A gilt $\text{Rang}(A) = 2$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (b) Das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ passt zu der Abbildung von $Ax = c$ oben. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (c) Das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ passt zu der Abbildung von $Ax = c$ oben. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (d) Das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ passt zu der Abbildung von $Ax = c$ oben. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 2.2:

In der folgenden Grafik ist ein lineares Gleichungssystem $Bx = c$ veranschaulicht, wobei B eine 3×3 Matrix ist.



Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

| | Wahr | Falsch | Konfidenz |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| (a) Der Vektor c ist der Nullvektor. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (b) Für die Matrix B gilt $\text{Rang}(B) = 2$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (c) Das lineare Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (d) Die Matrix B enthält eine Nullzeile. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 3.1:

| | | | |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| Betrachten Sie beliebige $n \times n$ Matrizen E, F, G und H . | | | |
| Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. | | | |
| | Wahr | Falsch | Konfidenz |
| (a) Es gilt $(EGF)^3 = E^3G^3F^3$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (b) Es gilt $H(G + F) + 2E = 2E + HF + HG$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (c) Es gilt $(H - G)^2 = H^2 - 2HG + G^2$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (d) Ist F eine Diagonalmatrix, so gilt $GF = FG$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 3.2:

| | | | |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| Es sei A eine beliebige 5×5 Matrix und | | | |
| $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$ | | | |
| Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. | | | |
| | Wahr | Falsch | Konfidenz |
| (a) Für $a = 2, b = 2$ und $c = 0$ gilt immer $AB = BA$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (b) Für $a = 3, b = 1$ und $c = 0$ gilt immer $AB = BA$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (c) Für $a = 0, b = 2$ und $c = 2$ gilt immer $AB = BA$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (d) Für $a = 0, b = 1$ und $c = 3$ gilt immer $AB = BA$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 4.1:

Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

für eine reelle Zahl $a > 0$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

| | Wahr | Falsch | Konfidenz |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| (a) Es gilt $\det(B) \neq 0$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (b) Die Determinante von B ist unabhängig vom Wert von a . | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (c) Das lineare Gleichungssystem $Bx = 0$ besitzt genau eine Lösung. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (d) Es gilt $\det(-B) = \det(B)$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 4.2:

Betrachten Sie die beiden reellen Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a \times b \neq 0,$$

sowie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

| | Wahr | Falsch | Konfidenz |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| (a) Für die Determinante von M gilt $\det(M) \neq 0$. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (b) Das homogene lineare Gleichungssystem $Mx = 0$ besitzt genau eine Lösung. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (c) Die Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms in der x_1x_2 -Ebene ist ungleich Null. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (d) Es existiert eine reelle Zahl λ , so dass $a = \lambda b$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 5.1:

Betrachten Sie die folgende Menge von Vektoren im Vektorraum \mathbb{R}^3

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

| | Wahr | Falsch | Konfidenz |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| (a) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ kann als Linearkombination von Vektoren aus der Menge E dargestellt werden. | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (b) Jeder beliebige Vektor in \mathbb{R}^3 kann als Linearkombination von Vektoren aus der Menge E dargestellt werden. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (c) Die Menge E ist eine Basis von \mathbb{R}^3 . | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (d) Die Menge E enthält eine Basis von \mathbb{R}^3 . | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 5.2:

Betrachten Sie die folgende Menge von Polynomen im Vektorraum \mathcal{P}_3

$$F = \{t^3, t^2 - t, t^2 - 1, t^3 - t^2 + t\},$$

sowie den von der Menge F aufgespannten Unterraum U von \mathcal{P}_3 .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

| | Wahr | Falsch | Konfidenz |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| (a) Das Polynom $2t^3 - t^2 + 2t - 1$ liegt in U . | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (b) $\dim(U) = 2$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (c) F ist eine Basis von U . | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| (d) $U = \mathcal{P}_3$. | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |