Semesterendtest

Dieser Test dient der Selbsteinschätzung. Alle Aufgaben sind online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Mittwoch, 12. Januar um 14:00 Uhr** ab.

1. Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Für welche beiden reellen Zahlen x_1 und x_2 gilt $B = A^{-1}$?

(a) $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$.

(b) $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

(c) $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

(d) $x_1 = -1$ und $x_2 = -1$.

2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A := \left(a^{(1)} \dots a^{(i)} \dots a^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ mit Spaltenvektoren } a^{(i)} \in \mathbb{R}^m \text{ für } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

und

$$b \in \mathbb{R}^m \text{ mit } b \notin \operatorname{span}\left\{a^{(1)}, \dots, a^{(i)}, \dots, a^{(n)}\right\}.$$

Dann existiert keine Lösung x zum Gleichungssystem $Ax = b$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

3. Es sei die 3×4-Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist eine Basis β des Unterraums $\ker(A) = \{x \mid Ax = 0\}$ gegeben durch …

(a) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(b) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(c) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(d) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

4. Welche der folgenden drei Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind jeweils linear unabhängig?

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(c) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

5. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{F} := F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in der Variablen x mit der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ für alle } f, g \in \mathcal{F}$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \text{ für alle } f \in \mathcal{F} \text{ und alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Darin enthalten sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Unterräume

$$\mathcal{P}_n(x) : = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

der Polynome mit Grad $\leq n$ in der Variablen x.
Es gilt:

(a) Die Dimension des Unterraums $\mathcal{P}_n(x)$ ist $n+1$.

(b) Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Element von $\mathcal{F}$, das heisst $\sin(x) \in \mathcal{F}$, aber liegt in keinem der Unterräume $\mathcal{P}_n(x)$, was heisst, dass $\sin(x) \notin \mathcal{P}_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Die Sinusfunktion $\sin(x)$ und die Cosinusfunktion $\cos(x)$ sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

(d) $1, \sin^2(x), \cos^2(x)$ sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

(e) Sind zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ linear unabhängig, so sind auch die Polynome $xp(x)$ und $xq(x)$ linear unabhängig.

(f) Der Untervektorraum $V = \operatorname{span}\{\sin(x)\}$ schneidet den Unterraum $\mathcal{P}_3(x)$ nur in 0, oder formal

$$V \cap \mathcal{P}_3(x) = \{0\}$$

und es gilt

$$\dim\left(\operatorname{span}\{\sin(x), 1, x, x^2, x^3\}\right) = 5.$$

(g) Die Abbildung $A\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$ ist linear.

6. Gegeben sei die 7×7-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) A ist orthogonal.

(b) A ist nicht orthogonal.

7. Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$ und $\mathbb{I}_n$ die $n \times n$-Einheitsmatrix. Weiter seien A eine $n \times n$-Matrix, $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren und es gelte

$$A^2 = 2\mathbb{I}_n \quad \text{und} \quad Au = v.$$

Dann folgt:

(a) Die Determinante $\det(A)$ von A ist entweder $-\sqrt{2^n}$ oder $\sqrt{2^n}$. Andere Werte für $\det(A)$ sind nicht möglich.

(b) Das lineare Gleichungssystem $Ax = u$ hat die Lösung $x = \frac{1}{2}v$.

8. Bestimmen Sie die Determinante $\det(A)$ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $\det(A) = 0$.

(b) $\det(A) = -1$.

(c) $\det(A) = 2$.

9. Gegeben seien zwei Matrizen A und B aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n > 1$.
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(b) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(c) Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spaltenvektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(i)}, \ldots, a^{(n)}$ von A linear unabhängig sind.

(d) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.

(e) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

(f) Es gilt $\det(A) = \det(A^T)$, wobei A^T die Transponierte von A bezeichnet.

(g) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.