

Informationen zur Studie in der
Linearen Algebra Vorlesung HS21

Vera Baumgartner

Manu Kapur



Die Bonusaufgaben – was gehört dazu?

- Zusätzliche Lernelemente: pro Semester 5 Bonusaufgaben und eine Lernkontrolle.
- Pro Lernelement kann ein Bonuspunkt erhalten werden.
- P erreichte Bonuspunkte resultieren in einen Bonus an der Basisprüfung von $\min\left(0.25, 0.25\frac{P}{9}\right)$ Notenpunkten.
- Kurze wöchentliche Umfragen zur Vorlesung und den Bonusaufgaben.

Studie Lineare Algebra – welche Daten möchten wir sammeln?

- Teilnahme und Bearbeitung der Bonusaufgaben (inklusive abgegebener Lösung)
- Erreichte Bonuspunkte
- Leistung in den Lernkontrollen und in der Prüfung
- Antworten auf die wöchentlichen Umfragen
- Resultat Selbsteinschätzungstest des Brückenkurses Mathematik
*Falls Sie am Selbsteinschätzungstest des Brückenkurses teilgenommen haben, bitte ich sie herzlich, diese Daten mit uns zu teilen:
So (und nur so) haben wir Zugriff auf Ihre Daten: Antworten Sie auf die E-Mail, welche Sie zum Brückenkurs eingeladen hat. Sie müssen keine Nachricht verfassen, nur auf `antworten` (bzw. `reply-to`) klicken und die E-Mail absenden. (Der Versand dieser E-Mail erfolgte am 17. August mit dem Betreff `ETHZ-Brueckenkurs Mathematik'.)*

Studie Lineare Algebra – sind Sie damit einverstanden?

Ihr Einverständnis zur Analyse und zu einer **anonymisierten** Verwendung ihrer Daten können Sie online auf echo.ethz.ch erteilen.

Wichtig: Bitte lesen Sie die Informationen zur Studie genau durch, bevor Sie Ihr Einverständnis geben.

Die Datenerhebung ist zentral für das Projekt und die weitere Verbesserung des Vorlesungsablaufs. Ich bitte Sie deshalb herzlich, Ihre Daten für die Analyse freizugeben.

Ihre erreichten Bonuspunkte erhalten Sie in jedem Fall, auch ohne Teilnahme an der Studie.

Bei Fragen können Sie sich gerne direkt an norbert.hungerbuehler@math.ethz.ch wenden.

Danke für Ihre Aufmerksamkeit und viel Erfolg im Studium!

Lineare Algebra I

Bonusaufgabe 1

Aufgabe 1

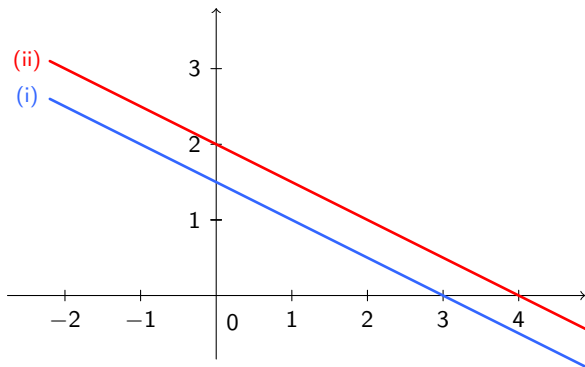
Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme. Denken Sie für jedes dieser Systeme über den Informationsgehalt der einzelnen Gleichungen nach: Entscheiden Sie für jedes Gleichungssystem, ohne zu rechnen, ob es eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen, oder keine Lösung hat.

(a) (i) $x_1 + 2x_2 = 3$
(ii) $x_1 + 2x_2 = 4$

Gleichung (i) widerspricht (ii). Die Lösungsmenge ist leer.

(a) (i) $x_1 + 2x_2 = 3$
(ii) $x_1 + 2x_2 = 4$

Geometrisch:



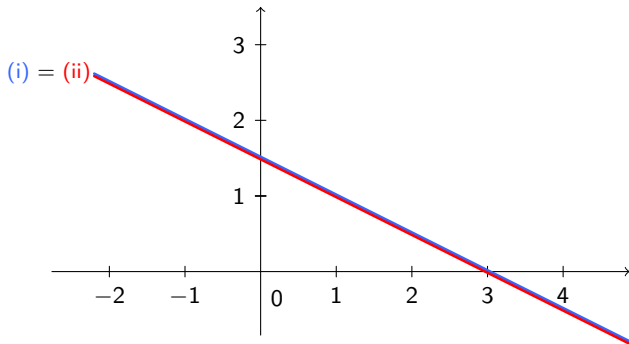
Kein Punkt liegt gleichzeitig auf beiden Geraden.

$$(b) \quad \begin{array}{l} (i) \quad x_1 + 2x_2 = 3 \\ (ii) \quad x_1 + 2x_2 = 3 \end{array}$$

Die Gleichungen stimmen überein: Es gibt unendliche viele Lösungen, da man (i) für jeden Wert von x_2 nach x_1 auflösen kann.

(b) (i) $x_1 + 2x_2 = 3$
(ii) $x_1 + 2x_2 = 3$

Geometrisch:



Die beiden Geraden sind identisch: Jeder Punkt (x_1, x_2) auf der Gerade löst (i) und (ii).

Dieses LGS hat also je nach rechter Seite keine oder unendlich viele Lösungen.

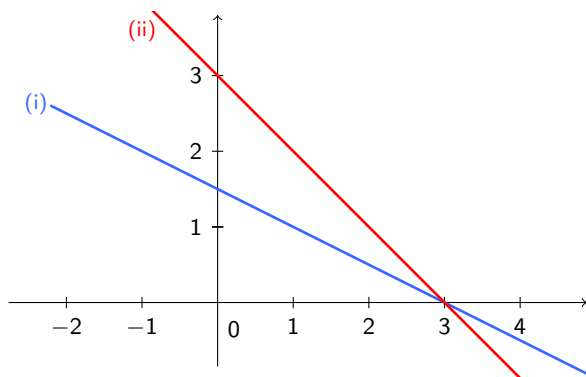
$$(c) \quad \begin{array}{l} (i) \quad x_1 + 2x_2 = 3 \\ (ii) \quad x_1 + x_2 = 3 \end{array}$$

Bei der Subtraktion der Gleichungen entsteht eine Gleichung für x_2 allein, mit einer eindeutigen Lösung. Danach folgt aus (i) oder (ii) eine eindeutige Lösung auch für x_1 .

Dies gilt bei beliebiger rechter Seite!

(c) (i) $x_1 + 2x_2 = 3$
(ii) $x_1 + x_2 = 3$

Geometrisch:



Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt (x_1, x_2) ,
der Lösung des LGS.

- (d) (i) $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$
(ii) $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$
(iii) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

Die Gleichung (ii) folgt durch Verdoppeln aus (i) und kann daher weggelassen werden. Dann kann man x_1 beliebig wählen und es resultiert dieselbe Situation wie in (c): In Abhängigkeit von x_1 erhält man eine Lösung für x_2 und x_3 . D.h. man hat eine einparametrische Lösungsschar.

$$(e) \quad \begin{array}{l} \text{(i)} \quad 2x_1 + x_2 = 4 \\ \text{(ii)} \quad \quad \quad 2x_3 = 8 \\ \text{(iii)} \quad 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{array}$$

Gleichung (ii) liefert einen festen Wert für x_3 . Die Gleichungen (i) und (iii) widersprechen sich nicht und haben eine eindeutige Lösung: Addiere das -2 -fache von (i) zu (iii) um x_1 zu bestimmen. Dann folgt x_2 aus (i) oder (iii). Das LGS hat unabhängig von der rechten Seite eine eindeutige Lösung.

$$(f) \quad \begin{aligned} (i) \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ (ii) \quad & 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ (iii) \quad & 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

Gleichung (ii) entsteht aus Gleichung (i) durch verdoppeln.
Gleichung (iii) entsteht aus Gleichung (i) durch verdreifachen. Jede Lösung von (i) löst also auch (ii) und (iii).

In (i) kann man x_2 und x_3 beliebig wählen und dann nach x_1 auflösen. Man erhält eine zweiparametrische Lösungsschar.

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \text{(g)} \quad & \text{(ii)} \quad 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ & \text{(iii)} \quad 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \end{aligned}$$

Die Summe aus (i) und (ii) widerspricht (iii). Die Lösungsmenge ist leer.

Wäre die 8 eine 6, könnte man (iii) weglassen. Da (ii) durch Verdoppeln aus (i) entsteht, kann man auch (ii) weglassen. (i) kann dann z. B. nach x_1 aufgelöst werden, wobei x_2 und x_3 frei wählbar sind. Man bekommt eine zweiparametrische Lösungsschar.

Aufgabe 2

Betrachten Sie erneut Ihre Resultate aus den Teilaufgaben. Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der linearen Gleichungssysteme. Wie wirken diese sich auf die Anzahl Lösungen der beiden Gleichungssysteme aus?

Beobachtung: Je nach Matrix A des LGS $Ax = b$ gilt:

- (A) Entweder das LGS hat unabhängig von b eine eindeutige Lösung (z. B. Teilaufgabe (c)), oder
- (B) Das LGS hat, abhängig von b , keine (z. B. Teilaufgabe (g)) oder eine ein- oder mehrparametrische Lösungsschar (z. B. Teilaufgabe (f)), oder
- (C) Das LGS hat unabhängig von b unendlich viele Lösungen (z. B. $x_1 + x_2 = b$).

Fragen:

- ▶ Wie kann man es der Matrix A ansehen, ob man im Fall (A) oder im Fall (B) oder im Fall (C) ist?
- ▶ Wenn man im Fall (B) ist, wie kann man es der rechten Seite b ansehen, ob man keine oder unendliche viele Lösungen hat?