Serie 2 - Bonusaufgabe 2

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt bis zum **Freitag, 8. Oktober 10:00** mit dem SAM-Upload Tool https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=b01. Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.
Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

1 Aufgaben zur geometrischen Interpretation von Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen

Aufgabe 1

(a) Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie die beiden Gleichungen des Systems als Geradengleichungen und zeichnen Sie diese Geraden in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie zudem auch die Lösungsmenge des Gleichungssystems in das Koordinatensystem ein und erklären Sie Ihre Zeichnung kurz.

(b) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, welches zu der geometrischen Darstellung im Koordinatensystem in der untenstehenden Abbildung 1 passt. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Geben Sie ein eigenes Beispiel für ein 2×2 lineares Gleichungssystem, welches unendlich viele Lösungen besitzt. Zeichnen Sie zudem dessen geometrische Darstellung in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein. Begründen Sie Ihre Antwort.

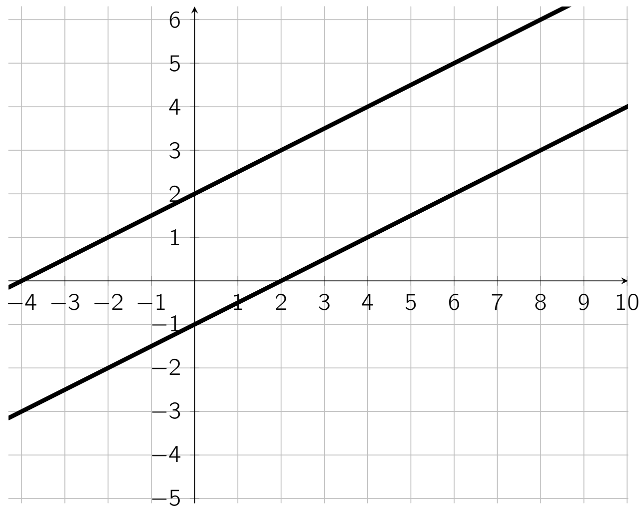


Abbildung 1: Geometrische Darstellung eines linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgenden vier linearen Gleichungssysteme. Verbinden Sie jedes dieser Gleichungssysteme mit dessen untenstehender geometrischer Interpretation (ohne dass Sie die Gleichungssysteme vorab graphisch darstellen). **Begründen Sie Ihre Zuordnungen**.

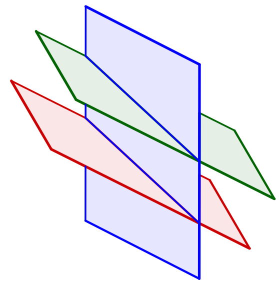
(a) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

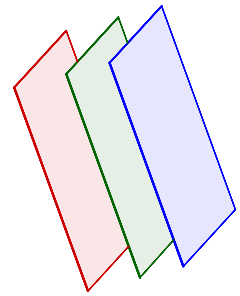
(c) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(d) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

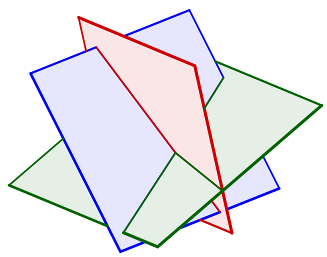
1.



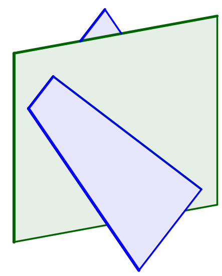
2.



3.



4.



Serie 2

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 15. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01.

1. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Jedes lineare Gleichungssystem mit der gleichen Anzahl von Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung.

(b) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.

(c) Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

2. Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2bx_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5 \\ & & 2bx_2 & + & 3ax_3 & = & b \end{array}$$

(a) Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,

(b) Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,

(c) eindeutig lösbar ist,

(d) keine Lösung hat

und geben Sie in jedem Fall die Lösungsmenge an.

3. *Dimensionsanalyse des Strömungswiderstands eines Schiffes*:
Im cgs-Masssystem gilt für die Einheiten:

Dichte des Wassers	$\rho :$	$cm^{-3}g^1sec^0$,
Schiffsgeschwindigkeit	$v :$	$cm^1g^0sec^{-1}$,
benetzte Oberfläche	$\mathcal{O} :$	$cm^2g^0sec^0$,
Schiffsmasse	$m :$	$cm^0g^1sec^0$,
Bremsverzögerung	$a :$	$cm^1g^0sec^{-2}$.

(a) Welche Formeln des Typs

$$\rho^\alpha v^\beta \mathcal{O}^\gamma m^\delta a^\varepsilon = K$$

sind vom Masssystem her möglich, wenn K eine dimensionslose Zahl sein soll?

(b) Welche Formeln ergeben sich für die Widerstandskraft $F = ma$?

Bemerkung: Die gefundene Lösung ist bei Schiffbauingenieuren tatsächlich in Gebrauch.

4. Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$ für $i = 1, 2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \, b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gauss–Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.

(b) Lösen Sie die Aufgabe nochmals mit Hilfe von MATLAB.