

# Lineare Algebra I

## Bonusaufgabe 3 (in Serie 4)

**1.(a)** Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Gilt  $IG = GI$ ?

$$IG = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = G$$

$$GI = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = G$$

Bemerkung: Es gilt ja allgemein für jede  $2 \times 2$ -Matrix  $A$

$$IA = A = AI$$

(ii) Gilt  $DH = HD$ ?

$$DH = 3IH = 3H = 3HI = H(3I) = HD$$

(ii) Gilt  $DH = HD$ ?

$$DH = 3IH = 3H = 3HI = H(3I) = HD$$

Dabei ist es vollkommen Wurst, was  $H$  für eine  $2 \times 2$  Matrix ist. Deshalb gilt genauso bei (iv) und (v):

(ii) Gilt  $DH = HD$ ?

$$DH = 3IH = 3H = 3HI = H(3I) = HD$$

Dabei ist es vollkommen Wurst, was  $H$  für eine  $2 \times 2$  Matrix ist. Deshalb gilt genauso bei (iv) und (v):

$$DF = FD \quad (\text{iv})$$

Und nochmal genauso:

$$DG = GD \quad (\text{v})$$

Auch die Zahl 3 spielt keine Rolle: Für jede Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$ , jede Matrix  $D := \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  und jede  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  gilt  $DA = AD = \lambda A$ .

Aber Achtung bei (iii): Gilt  $FH = HF$ ?

$$FH = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 32 & 12 \end{pmatrix}$$

aber

$$HF = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$$

Also  $FH \neq HF$  obwohl  $F$  eine Diagonalmatrix ist.

Aber Achtung bei (iii): Gilt  $FH = HF$ ?

$$FH = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 32 & 12 \end{pmatrix}$$

aber

$$HF = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$$

Also  $FH \neq HF$  obwohl  $F$  eine Diagonalmatrix ist.  
Beachte den Spalten- und Zeilenstruktursatz!

(vi) Und hier? Gilt  $GH = HG$ ?

$$GH = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 9 \\ 36 & 6 \end{pmatrix}$$

$$HG = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 28 & 30 \end{pmatrix}$$

D.h. in diesem Beispiel gilt  $GH \neq HG$ .

## Lehre daraus

Die Vielfachen  $D := \lambda I$  der  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix  $I$  kommutieren bei der Multiplikation mit allen  $2 \times 2$ -Matrizen  $A$ :

$$DA = AD = \lambda A$$

Tatsächlich sind es **nur** diese Matrizen  $\lambda I$  welche mit **allen** anderen  $2 \times 2$ -Matrizen kommutieren.

Dasselbe gilt für den Fall von  $n \times n$ -Matrizen.

(b) Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} b_1 & -4 \\ -6 & b_2 \end{pmatrix}$$

Finden Sie Werte für die Koeffizienten  $b_1, b_2$  von  $B$ , so dass  $AB = BA$  erfüllt ist. Finden Sie andererseits Werte für  $b_1, b_2$ , so dass  $AB \neq BA$  gilt.

Wir rechnen  $AB$  und  $BA$  einfach einmal aus:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & -4 \\ -6 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - 12 & 2b_2 - 4 \\ 3b_1 + 6 & -b_2 - 12 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_1 & -4 \\ -6 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - 12 & 2b_1 + 4 \\ 3b_2 - 6 & -b_2 - 12 \end{pmatrix}$$

Die roten Einträge auf der Diagonale stimmen bereits überein.

Damit auch die anderen Koeffizienten übereinstimmen muss gelten:

$$2b_2 - 4 = 2b_1 + 4 \quad \text{und} \quad 3b_1 + 6 = 3b_2 - 6$$

Das ist ein LGS für  $b_1, b_2$ :

$$\begin{aligned} 2b_1 - 2b_2 &= -8 \\ 3b_1 - 3b_2 &= -12 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Gauss}} \quad b_2 = \alpha \in \mathbb{R} \text{ beliebig, } b_1 = \alpha - 4.$$

Für Werte  $b_1, b_2$  nicht von dieser Form gilt  $AB \neq BA$ , also z.B.  
 $b_1 = b_2 = 0$ .

Allgemein: Sei  $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Damit  $AC = CA$  gilt, d.h.

$AC - CA = 0$ , muss gelten

$$\begin{aligned} AC - CA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2c - 3b & 2(-a + b + d) \\ 3a - 2c - 3d & 3b - 2c \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir lesen das LGS mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten sofort ab

$$\begin{array}{rcccc} & -3b & +2c & & =0 \\ -2a & +2b & & +2d & =0 \\ 3a & & -2c & -3d & =0 \\ & 3b & -2c & & =0 \end{array}$$

Mit Gauss findet man flugs die allgemeine Lösung:  $c \in \mathbb{R}$  und  $d \in \mathbb{R}$  sind freie Parameter,  $b = \frac{2}{3}c$ ,  $a = \frac{2}{3}c + d$ . Also

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}c + d & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}$$

(c) Seien  $E, F, G, H$  beliebige reelle  $2 \times 2$ -Matrizen. Welche der folgenden Gleichungen gelten allgemein (das heisst, dass sie für **alle** Matrizen gelten müssen)? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

(c) Seien  $E, F, G, H$  beliebige reelle  $2 \times 2$ -Matrizen. Welche der folgenden Gleichungen gelten allgemein (das heisst, dass sie für **alle** Matrizen gelten müssen)? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

(i)  $EFG + EFG = 2EFG$  gilt allgemein:

$$(EFG + EFG)_{ij} = (EFG)_{ij} + (EFG)_{ij} = 2(EFG)_{ij} = (2EFG)_{ij}$$

(ii)  $EFG + EGF = 2EFG$  ist äquivalent (subtrahiere  $EFG$ ) zu  $EGF = EFG$ . Mit  $E = I$  müsste gelten  $GF = FG$ , das ist aber im allgemeinen falsch.



(iv)  $EFEFG + FEEFG + E^2F^2G = 3E^2F^2G$  ist im Allgemeinen falsch, sogar für  $G = I$ :

$EFEF + FEEF = 3E^2F^2$ . Dies ist z.B. für  $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  falsch. Dann gilt nämlich  $E^2 = F^2 = 0$ , aber

$EF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (EF)^2 \neq 0$ .

(v)  $EGHH + EGGH = (EGH + EG^2)H$  ist richtig, denn

(v)  $EGHH + EGGH = (EGH + EG^2)H$  ist richtig, denn

$$EGHH + EGGH \stackrel{\text{Distributiv-}}{=} \text{gesetz} (EGH + EGG)H = (EGH + EG^2)H$$

(vi)  $(GH)^2 = G^2H^2$  ist im Allgemeinen falsch.

(vi)  $(GH)^2 = G^2H^2$  ist im Allgemeinen falsch.

Wie gesehen, z.B. für  $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ist

$(GH)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  aber  $G^2H^2 = 0$ .