

Serie 4 - Bonusaufgabe 3

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt bis zum **Freitag, 22. Oktober 10:00** mit dem SAM-Upload Tool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=b01>. Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.

Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

1 Aufgaben zur Matrixmultiplikation

(a) Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob für die folgenden Matrixprodukte Gleichheit gilt.

- (i) Gilt $IG = GI$?
- (ii) Gilt $DH = HD$?
- (iii) Gilt $FH = HF$?
- (iv) Gilt $DF = FD$?
- (v) Gilt $DG = GD$?
- (vi) Gilt $GH = HG$?

Begründen Sie alle Ihre Entscheidungen. Vergleichen Sie Ihre Resultate: Für welche der obigen Matrizenpaare gilt die Gleichheit der Matrixprodukte, für welche gilt sie nicht?

Versuchen Sie, Ihre Beobachtungen zu verallgemeinern: Gibt es eine Matrix A , sodass für jede beliebige Matrix B stets $AB = BA$ gilt? Falls ja, geben Sie ein Beispiel für eine solche Matrix. Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & -4 \\ -6 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie Werte für die Koeffizienten b_1 und b_2 von B , so dass $AB = BA$ erfüllt ist. Finden Sie andererseits Werte für die Koeffizienten b_1 und b_2 von B , so dass $AB \neq BA$ gilt.

Versuchen Sie, Ihre Beobachtungen zu verallgemeinern: Welche Eigenschaften müssen die Koeffizienten einer allgemeinen Matrix

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

erfüllen, so dass $AC = CA$ gilt?

(c) Seien E, F, G, H beliebige reelle 2×2 -Matrizen. Welche der folgenden Gleichungen gelten allgemein (das heisst, dass sie für **alle** Matrizen gelten müssen)? Welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $EFG + EFG = 2EFG$

(ii) $EFG + EGF = 2EFG$

(iii) $G(H + E) = GE + GH$

(iv) $EF EFG + FEEFG + E^2 F^2 G = 3E^2 F^2 G$

(v) $EGHH + EGGH = (EGH + EG^2)H$

(vi) $(GH)^2 = G^2 H^2$

Serie 4

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 29. Oktober um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01>.

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (a) $(AB)^T = A^T B^T$.
- (b) $(AB)^T = B^T A^T$.
- (c) $A^T A$ ist symmetrisch.
- (d) AA^T ist symmetrisch.
- (e) Ist C eine beliebige quadratische Matrix, so ist $C + C^T$ symmetrisch.

2. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:

- (i) AB (ii) BA (iii) Ax (iv) $A^2 := AA$
- (v) $B^2 := BB$ (vi) $y^T x$ (vii) yx (viii) xy^T
- (ix) $B^T y$ (x) $y^T B$.

(b) Lösen Sie (a) nochmals mit Hilfe von MATLAB.

3. Polynominterpolation

Gegeben sind die Funktionswerte y_0, y_1, \dots, y_n über den Abszissen x_0, x_1, \dots, x_n .
Gesucht ist das interpolierende Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Es soll also gelten

$$p(x_i) = y_i \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

- (a) Man bestimme das Gleichungssystem für die Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n in Matrixschreibweise.
- (b) Man bestimme das Interpolationspolynom für

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \quad (n = 4).$$

- (c) Man betrachte die Polynome

$$\ell_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Welche Werte nimmt ℓ_i in den Punkten x_k an? Man bestimme die Lösung von (b) mit Hilfe der Polynome ℓ_i (Lagrange'sche Interpolationsformel).

4. Kirchhoffsche Regeln

Für elektrische Stromkreise gelten die folgenden zwei Regeln:

- Die Summe der Teilströme in jedem Knoten ist Null.
- Die Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist Null.

Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für die fünf Teilströme des unten skizzierten Gleichstromkreises und lösen Sie es für

$$R = 300\Omega, \quad U = V = 300V, \quad W = 200V.$$

Hinweis: Wählen Sie die Vorzeichen entsprechend den Zählpfeilen!

