Serie 6 - Bonusaufgabe 4

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt bis zum **Freitag, 5. November 10:00** mit dem SAM-Upload Tool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=b01`. Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.
Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

1 Aufgaben zur Kontextualisierung der Determinante

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das Vektorprodukt $a \times b$. Welche z-Komponente hat $a \times b$?

(b) Was bedeutet es geometrisch gesehen für die Vektoren a und b, wenn die z-Komponente des Vektorprodukts Null ist? Erklären Sie.

(c) Visualisieren Sie die folgenden Vektorenpaare graphisch:

(i) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie ohne Rechnung für jedes dieser Paare, ob die z-Komponente des Vektorprodukts des jeweiligen Vektorenpaars Null ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das Parallelogramm, welches von den Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

(a) Berechnen Sie die Fläche dieses Parallelogramms. Drücken Sie die Fläche mithilfe der Komponenten von a und b aus. Tipp: Nehmen Sie die Skizze unten zur Hilfe.

(b) Was bedeutet es geometrisch gesehen für die Vektoren a und b, wenn die Fläche des Parallelogramms Null ist? Erklären Sie.

(c) Visualisieren Sie die folgenden Vektorenpaare graphisch:

(i) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

(ii) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie ohne Rechnung für jedes dieser Paare, ob die Fläche des Parallelogramms, welches vom jeweiligen Vektorenpaar aufgespannt wird, Null ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Antworten.

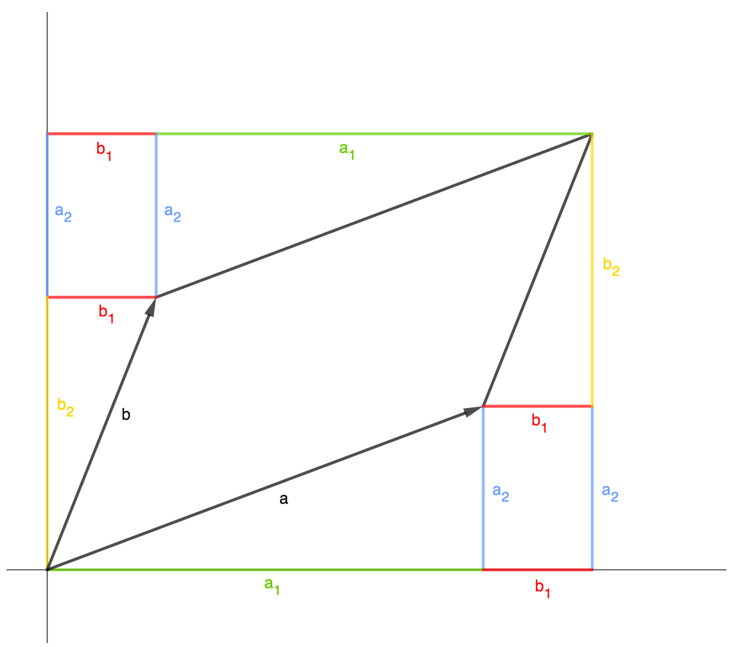

Abbildung 1: Skizze eines Parallelogramms.

Aufgabe 3

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = c$, welches durch

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem und finden Sie Ausdrücke für x_1 und x_2 in Abhängigkeit von den Matrixeinträgen von A und den Vektorkomponenten von c. Beachten Sie, dass Sie dafür eine Fallunterscheidung benötigen. Erinnern Sie sich beispielsweise daran, dass falls $a_1 \neq 0$ gilt, das obige lineare Gleichungssystem mithilfe des Gaussverfahrens in das äquivalente lineare Gleichungssystem $\tilde{A}x = \tilde{c}$ umgeformt werden kann, wobei

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & b_2 - a_2\frac{b_1}{a_1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 - a_2\frac{c_1}{a_1} \end{pmatrix}.$$

(b) Nutzen Sie die Fallunterscheidung aus der vorherigen Teilaufgabe, um Kriterien für die Matrixeinträge von A und die Vektorkomponenten von c zu bestimmen, damit...

(i) ... das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat.

(ii) ... das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

(iii) ... das Gleichungssystem keine Lösung hat.

Begründen Sie Ihre Antworten.

(c) Vergleichen Sie Ihre Resultate aus den Aufgaben 1a, 2a und 3b. Was beobachten Sie?

(d) Betrachten Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und denken Sie über die Bedeutung der jeweiligen Gleichungen nach. Bestimmen Sie für jedes der folgenden Gleichungssysteme, ohne es zu lösen, ob es eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung hat. Verwenden Sie dazu Ihr Resultat aus Aufgabe 3b und begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Betrachten Sie erneut die Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Vektorprodukt $a \times b$ sowie das von a und b aufgespannte Parallelogramm.

(a) Was bedeutet es geometrisch gesehen, wenn die Reihenfolge der Vektoren a und b beim Vektorprodukt vertauscht wird, wenn also $b \times a$ statt $a \times b$ berechnet wird? Erklären Sie.

(b) Welchen Einfluss hat es auf die Flächenberechnung des Parallelogramms, wenn die Reihenfolge der Vektoren a und b vertauscht wird? Erklären Sie.

(c) Vergleichen Sie Ihre Antworten auf die Teilaufgaben 4a und 4b. Was beobachten Sie?

Serie 6

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 12. November um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01.

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Sei A symmetrisch und regulär. Dann ist auch A^{-1} symmetrisch.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist A genau für $a = \pm\sqrt{3/2}$ orthogonal.

(c) Es gibt orthogonale Matrizen, die singulär sind.

2. *Reguläre und Singuläre* 3×3*-Matrizen*

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A regulär ist.

(b) Für welche Werte des Parameters γ ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \gamma & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

singulär?

3. *Orthogonale 2×2-Matrizen*
Sei $\mathbb{I}_2$ die 2×2-Einheitsmatrix und $u = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^T$.

(a) Für welche Werte des Parameters α ist die Matrix

$$V := \mathbb{I}_2 - \alpha u u^T$$

orthogonal?

(b) Lösen Sie für die in (a) ermittelten Werte von α das Gleichungssystem

$$V \cdot x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ohne den Gauss-Algorithmus zu benutzen.

(c) Kontrollieren Sie (a) und (b) mit Matlab.

4. Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a, b, c, d ist A regulär?

(b) Bestimmen Sie für die in (a) ermittelten Werte von a, b, c, d die Inverse A^{-1}.