Serie 8

Diese Serie besteht nur aus Multiple Choice-Aufgaben, die auf https://echo.ethz.ch zu lösen sind. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 26. November um 14:00 Uhr** ab.

1. Bestimmen Sie das Matrixprodukt $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Berechnen Sie den Matrixterm

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{7}{10} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ \frac{7}{9} & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -\frac{46}{15} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -16 \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(e) Keine der genannten Möglichkeiten.

3. Bestimmen Sie die Inverse B^{-1} der 2×2-Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Die Matrix B ist nicht invertierbar.

4. Gegeben sei die 3×2-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser möchten wir die erste Spalte $A^{(1)}$ extrahieren. Das heisst, das Produkt von rechts oder links mit einer weiteren Matrix ist die erste Spalte $A^{(1)}$ von A.
Für welche der folgenden Möglichkeiten ist dies gegeben?

(a) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(e) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Sei A eine 4×4-Matrix. Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

(i) $Ax = b$ hat für jedes b höchstens eine Lösung.

(ii) $Ax = b$ hat für jedes b mindestens eine Lösung.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

6. Für die reelle 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und den reellen Vektor $b = (1, 2, 0)^T = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ...

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

7. Sei A eine 2×3-Matrix. Dann existiert eine 3×2-Matrix B, welche nicht die Nullmatrix ist, aber trotzdem gilt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

8. Für die reelle 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0 \ldots$

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

9. Für die reelle 4×4-Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -12 & a^2 - 7 \\ 0 & -1 & 7a + 5 & 5 \end{pmatrix}$$

gilt:

(a) Für $a = 1$ ist B nicht invertierbar.

(b) $\text{Rang}(B) \geq 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

(c) Für $a = 0$ ist $\det(B) = 0$.

10. Der Rang der 3×4-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

beträgt...

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

11. Seien A und B zwei symmetrische Matrizen. Dann ist das Matrixprodukt AB auch symmetrisch.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

12. Gegeben sei eine orthogonale Matrix A mit Inverser A^{-1}.
Dann gilt:

(a) $A^{-1} = A^T$

(b) $A^{-1} = 2A$

(c) $A^{-1} = -A$

(d) Die Inverse A^{-1} existiert nicht.

(e) Keine der genannten Möglichkeiten.

13. Gegeben seien die beiden 2×2-Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) A_1 ist nicht orthogonal.

(b) A_2 ist nicht orthogonal, aber ihre Inverse A_2^{-1} ist es.

14. Gegeben seien die beiden 2×2-Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) A_1 ist orthogonal.

(b) A_2 ist orthogonal.

(c) Keine der beiden genannten Möglichkeiten.

15. Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$, so dass $A^T A$ die Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ ist.
Dann gilt:

(a) A ist orthogonal und $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

16. Gegeben sei die $n \times n$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 2 & 1 & & & \\ 3 & 1 & & * & \\ \vdots & \vdots & & & \\ n & 1 & & & \end{pmatrix},$$

wobei nur die ersten beiden Spalten bekannt sind. Angenommen es existiert eine LR-Zerlegung $A = LR$, was können Sie darüber aussagen?

(a) Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & \dots & -n \end{pmatrix}^T$.

(b) Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & \dots & -n \end{pmatrix}^T$.

(c) Die erste Spalte von L ist gleich der ersten Spalte von A.

(d) Man muss die gesamte Matrix A kennen, um die erste Spalte von L zu bestimmen.

(e) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 0.

(f) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 1.

(g) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 3.

(h) Man muss die gesamte Matrix A kennen, um den Eintrag r_{22} der Matrix R zu bestimmen.