Serie 10

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 10. Dezember um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01.

1. Für die vier Vektoren

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Matrix $A := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ gelten welche der folgenden Aussagen?

(a) $\det(A) = 0$.

(b) Der Rang von A ist 3.

(c) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = 0$ hat nicht-triviale Lösungen.

(d) Das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat genau eine Lösung.

(e) Die Lösbarkeit von $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ hängt von der Wahl von $\mathbf{v}$ ab.

(f) Die Matrix A hat eine Inverse.

2. [Prüfungsaufgabe, Frühling 2007] Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$.

(b) Für welche Werte der Parameter a, b, c, d ist die Matrix A singulär?

3. *Cramer'sche Regel, 1750*
Sei A eine reguläre $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor. Ersetzt man die k-te Spalte von A durch b, erhält man eine Matrix A_k. Beweisen Sie, dass die Lösung von $Ax = b$ durch

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

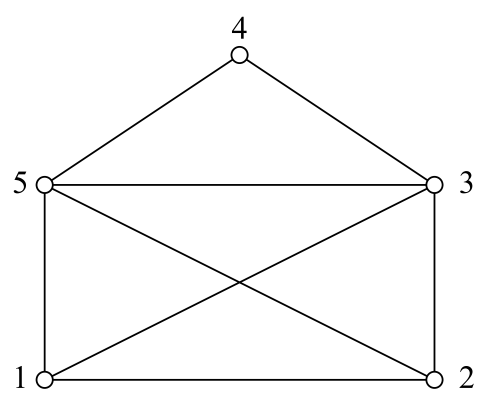
gegeben ist.

Bemerkung: Bezüglich des Rechenaufwandes ist die Cramer'sche Regel eine im Vergleich zum Gaussverfahren ineffiziente Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

4. *Adjazenzmatrix und Laplace-Operator eines Graphen*
Ein Graph G mit den Knoten $1, 2, \ldots, n$ wird vollständig durch seine Adjazenzmatrix $A^G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beschrieben, wobei der (i, j)-te Eintrag von A^G gegeben ist durch

$$(A^G)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \text{ mit } j \text{ durch eine Kante verbunden ist;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispielsweise gehört zum untenstehenden Graph G



G

die Adjazenzmatrix

$$A^G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei d_i der Grad des Knotens i, d.h. die Anzahl seiner Nachbarn, und

$$D^G = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n).$$

Dann heisst die Matrix

$$L^G := D^G - A^G$$

Laplace-Operator auf G.

(a) Zeigen Sie für beliebige G, dass $\det(L^G) = 0$ gilt.

(b) Kirchhoff's Matrix-Tree-Theorem besagt, dass jeder Kofaktor von L^G die Anzahl der G aufspannenden Teilbäume ist. Man berechne diese Anzahl für das obige Beispiel.