

Serie 12

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 24. Dezember um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01>.

1. Betrachten Sie den \mathbb{R} -Vektorraum $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} mit der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Darin enthalten ist der Unterraum

$$P_2 := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, 2\}$$

der Polynome mit Grad ≤ 2 .

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (a) $\text{span}\{x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1\}$ ist gleich P_2 .
- (b) $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$ sind linear unabhängig.
- (c) $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$ bilden ein Erzeugendensystem von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (d) $x + 1, x - 1, x^2 + 1, x^2 - 1$ bilden ein Erzeugendensystem von P_2 .

2. Bestimmen Sie, ob

$$V = \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, 2, 3 \right\},$$

versehen mit der Standard-Skalarmultiplikation \cdot gegeben durch

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}$$

und der Addition \oplus , definiert durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix},$$

ein \mathbb{R} -Vektorraum ist.

3. Unterräume von \mathbb{R}^3

(a) Sei V die folgende Menge von Vektoren:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x - y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes \mathbb{R}^3 ist.

(b) Ist die Menge

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x - 1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

auch ein Unterraum von \mathbb{R}^3 ? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Der Vektorraum \mathbb{Z}_2^n über dem Körper \mathbb{Z}_2

(a) Die Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$, versehen mit den Rechenregeln

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \odot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

ist ein Körper. Das heisst, es gelten bezüglich Addition \oplus und Multiplikation \odot die selben Rechenregeln wie in \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{Q} . Versehen Sie

$$V = \mathbb{Z}_2^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbb{Z}_2 \text{ für } i = 1, 2, \dots, n\}$$

mit den passenden Vektoroperationen und zeigen Sie, dass V damit ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{Z}_2 wird.

(b) Sei die Menge C gegeben durch

$$C = \{x \in \mathbb{Z}_2^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ ist gerade}\},$$

wobei $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Zeigen Sie, dass C ein Unterraum von \mathbb{Z}_2^n ist.

Bemerkung: C ist ein sogenannter 1-fehlererkennender Code: Wird ein Bit einer Nachricht $x \in C$ falsch übermittelt, kann der Empfänger dies feststellen (wie?) und die Wiederholung der Übermittlung veranlassen.