Lösung Serie 1

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 8. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01.

1. Gegeben sei das LGS (lineare Gleichungssystem)

$$\begin{array}{cccc} ax & + & y & = a \\ x & + & ay & = a \end{array} .$$

Welche Aussagen treffen zu?

(a) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

(b) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

(c) Für $a = -1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

(d) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

(e) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau zwei Lösungen.

Lösung: Korrekt sind (a), (c) und (d), denn es gilt:

✓ (a) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.
Nach kurzer Rechnung folgt, dass $x = y = 2/3$ die einzige mögliche Lösung ist.

(b) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.
Für $a = 1$ sind beide Gleichungen $x + y = 1$. Also hat man nur eine lineare Gleichung, und eine solche kann nicht gleichzeitig die Werte zweier Variablen fixieren.

✓ (c) Für $a = -1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.
Mit $a = -1$ erhalten wir die Gleichungen $-x + y = -1$ und $x - y = -1$. Multipliziert man die erste Gleichung beidseitig mit -1 (eine solche Operation lässt die Lösungsmenge natürlich unverändert) so erhalten wir, da $1 \neq -1$, das widersprüchliche Gleichungssystem: $x - y = 1$ und $x - y = -1$.

✓ (d) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
Für $a = 1$ ist jedes Paar $(x, y) = (\alpha, 1 - \alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Lösung des LGS.

(e) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau zwei Lösungen.
Ein LGS hat entweder **keine**, **genau eine** *oder aber* **unendlich viele** *Lösungen. Achtung: Ein Paar (x, y) welches das LGS erfüllt zählt als* **eine** *Lösung, nicht etwa als zwei Lösungen.*

2. Man löse das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & b_3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & b_4 \end{array}$$

mit dem Gauss–Algorithmus für die folgenden Parameter:

(a) $b_1 = 1, \ \ b_2 = 3, \ \ b_3 = 2, \ \ b_4 = 2;$

(b) $b_1 = 0, \ \ b_2 = -3, \ \ b_3 = 2, \ \ b_4 = 1;$

(c) $b_1 = 1, \ \ b_2 = 1, \ \ b_3 = 1, \ \ b_4 = 1.$

Lösung: Mit dem Gauss–Algorithmus erhält man für **(a)**, **(b)** und **(c)** schrittweise ein einfacheres Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccc|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & (a) & (b) & (c) \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 2 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow{\text{2.,3.,4. Zeile}-\text{1. Zeile}} \begin{array}{cccc|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & (a) & (b) & (c) \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 18 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{4. Zeile}-3\times\text{2. Zeile}]{\text{3. Zeile}-2\times\text{2. Zeile}} \begin{array}{cccc|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & (a) & (b) & (c) \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 12 & -5 & 10 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{4. Zeile}-\frac{5}{2}\times\text{3. Zeile}} \begin{array}{cccc|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & (a) & (b) & (c) \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & -10 & 0 \end{array}$$

Es folgt, indem man zuerst x_4, dann x_3, x_2 und x_1 ausrechnet:

(a) $x_4 = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$,
$x_3 = \frac{-3-4x_4}{2} = \frac{-3-4\cdot\frac{5}{4}}{2} = -4$,
$x_2 = 2 - 2x_4 - x_3 = 2 - 2 \cdot \frac{5}{4} - (-4) = \frac{7}{2}$,
$x_1 = 1 - 2x_4 - 2x_3 - x_2 = 1 - 2 \cdot \frac{5}{4} - 2 \cdot (-4) - \frac{7}{2} = 3;$

(b) $x_4 = \frac{-10}{2} = -5$,
$x_3 = \frac{8-4x_4}{2} = \frac{8-4\cdot(-5)}{2} = 14$,
$x_2 = -3 - 2x_4 - x_3 = -3 - 2\cdot(-5) - 14 = -7$,
$x_1 = 0 - 2x_4 - 2x_3 - x_2 = 0 - 2\cdot(-5) - 2\cdot 14 - (-7) = -11$;

(c) $x_4 = \frac{0}{2} = 0$,
$x_3 = \frac{0-4x_4}{2} = \frac{0-4\cdot 0}{2} = 0$,
$x_2 = 0 - 2x_4 - x_3 = 0 - 2\cdot 0 - 0 = 0$,
$x_1 = 1 - 2x_4 - 2x_3 - x_2 = 1 - 2\cdot 0 - 2\cdot 0 - 0 = 1$.

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}.$$

Lösung: Mit dem Gauss–Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array} \xrightarrow{\text{1. Zeile}\leftrightarrow\text{2. Zeile}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \end{array} \xrightarrow{\text{2. Zeile}-3\times\text{1. Zeile}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 2 \end{array}$$

Wir haben mehr Unbekannte als Gleichungen. In solchen Fällen gibt es entweder keine Lösung (wenn mehrere Gleichungen sich widersprechen, z.B. $x+y+z=1$ und $x+y+z=0$) oder unendlich viele.
Hier hat man unendlich viele Lösungen:
Für jede Wahl von x_3 kann man ein passendes x_2 finden, so dass $-5x_2 + 5x_3 = 2$ gilt.
Formell schreiben wir:
$x_3 = t \in \mathbb{R}$ (t ist ein sogenannter **freier Parameter**). Daraus folgt

$$x_2 = \frac{2-5x_3}{-5} = \frac{2-5t}{-5} = t - \frac{2}{5} \text{ und } x_1 = 2 + x_3 - 3x_2 = 2 + t - 3\left(t - \frac{2}{5}\right) = \frac{16}{5} - 2t.$$

Die **Lösungsmenge** L des Gleichungssystems ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{16}{5} - 2t \\ t - \frac{2}{5} \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\},$$

oder äquivalent dazu

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Lösen Sie die Aufgaben **2** und **3** nochmals mit Hilfe von MATLAB.

Lösung: Der folgende Code löst die Aufgabe. % markiert kommentierte Zeilen, die also nicht ausgeführt werden. Jede Zeile ist mit Enter abzuschliessen/einzugeben.

```
% Aufgabe 2
A=[ 1  1  2  2 ;
    1  2  3  4 ;
    1  3  6  10;
    1  4  10  20]
b1=[1; 3 ; 2 ; 2 ]
b2=[0; -3; 2 ; 1 ] ;
x1=A\b1
x2=A\b2

% Aufgabe 3
C=[3  4  2;
   1  3  -1];
d=[8;  1];
x3=null(C,' r ')
% null(C) berechnet eine nichttriviale Loesung des entsprechenden
% homogenen Gleichungssystems; die Option ' r ' stellt sicher, dass
% die Loesung rational ist
x4=C\d
% Die allgemeine Loesung ist von der Form c*x3+x4, wobei c eine
% beliebige reelle Zahl ist.
```

5. (Fakultativ) Man zeige, dass zur Ausführung des Gauss-Verfahrens die Operation

(II) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

genügt.

Lösung: Man muss zeigen, dass man jede Operation vom Typ (I) - Zeilen vertauschen - durch eine Folge von Operationen vom Typ (II) ersetzen kann. Also angenommen man möchte die a-te und b-te Zeile vertauschen, dann kann man zum Beispiel wie folgt vorgehen:

Operation	Inhalt der a-ten Zeile	Inhalt der b-ten Zeile
Gegeben	X	Y
1. Zur b-ten Zeile die a-te Zeile hinzuaddieren	X	$X+Y$
2. Von der a-ten Zeile b-te Zeile subtrahieren	$-Y$	$X+Y$
3. Zur b-ten Zeile die a-te Zeile hinzuaddieren	$-Y$	$X.$

Bis auf das Vorzeichen in der a-ten Zeile haben wir die gewünschte Vertauschung erreicht. Da Vorzeichen beim Gauss-Verfahren keine Rolle spielen (Multiplikation einer Zeile mit ± 1), ist diese Konfiguration äquivalent zu derjenigen, in der Y in der a-ten Zeile und X in der b-ten Zeile steht.