Lösung Serie 2

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 15. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01.

1. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Jedes lineare Gleichungssystem mit der gleichen Anzahl von Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung.

(b) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.

(c) Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Lösung: Korrekt ist nur (d), da:

(a) Jedes lineare Gleichungssystem mit der gleichen Anzahl von Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung.
Nein, z.B. hat das LGS $0 \cdot x = a$ *keine Lösung für* $a \neq 0$*, respektive unendlich viele Lösungen für* $a = 0$.

(b) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.
Nein, z.B. hat das LGS $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$ *keine Lösung. Finden Sie ein Beispiel mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen.*

(c) Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.
Doch, z.B. kann eine bereits im System vorhandene Gleichung beliebig oft hinzugefügt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.

✓ (d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

2. Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2bx_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5 \\ & & 2bx_2 & + & 3ax_3 & = & b \end{array}$$

(a) Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,

(b) Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,

(c) eindeutig lösbar ist,

(d) keine Lösung hat

und geben Sie in jedem Fall die Lösungsmenge an.

Lösung: Mit dem Gauss–Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array} \quad \xrightarrow{\text{2. Zeile}-\text{1. Zeile}} \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array} \; (*) \quad \xrightarrow{\text{3. Zeile}+\text{2. Zeile}} \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a & b \end{array} \; (**)$$

1. Fall: b = 0: 2. Zeile und 3. Zeile in $(*)$ vertauschen ergibt mit $b = 0$:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (***)$$

(i) $a = 0$: Die Lösungsmenge ist $x_3 = s,\ x_2 = t,\ x_1 = \frac{5-4x_3}{3} = \frac{5-4s}{3} = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}s$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. (ergibt sich aus der 1. Zeile von $(***)$)

(ii) $a \neq 0$: Die Lösungsmenge ist $x_3 = 0$ (ergibt sich aus der 2. Zeile von $(***)$), $x_2 = t$, $x_1 = \frac{5}{3}$ (ergibt sich aus der 1. Zeile von $(***)$) mit $t \in \mathbb{R}$.

2. Fall: b $\neq$ 0: Hier ist $-2b$ Pivot bei $(*)$ und daher verwenden wir $(**)$ von oben:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a & b \end{array} \quad (**)$$

(i) $a = 0$: In diesem Fall gibt es keine Lösung (wegen der 3. Zeile $3a = b$ in $(**)$).

(ii) $\underline{a \neq 0}$: Die Lösung ist $x_3 = \frac{b}{3a}$ (aus der 3. Zeile von $(**)$),
$x_2 = 0$ (aus der 2. Zeile von $(**)$),
$x_1 = \frac{5-4x_3}{3} = \frac{5-4\frac{b}{3a}}{3} = \frac{5}{3} - \frac{4b}{9a}$ (aus der 1. Zeile von $(**)$).

Folglich gilt

(a) falls $a = 0$, $b = 0$: Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,

(b) falls $a \neq 0$, $b = 0$: Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,

(c) falls $a \neq 0$, $b \neq 0$: eindeutige Lösung,

(d) falls $a = 0$, $b \neq 0$: keine Lösung.

3. *Dimensionsanalyse des Strömungswiderstands eines Schiffes*:
Im cgs-Masssystem gilt für die Einheiten:

Dichte des Wassers	ρ :	$cm^{-3}g^1sec^0$,
Schiffsgeschwindigkeit	v :	$cm^1g^0sec^{-1}$,
benetzte Oberfläche	$\mathcal{O}$:	$cm^2g^0sec^0$,
Schiffsmasse	m :	$cm^0g^1sec^0$,
Bremsverzögerung	a :	$cm^1g^0sec^{-2}$.

(a) Welche Formeln des Typs
$$\rho^\alpha v^\beta \mathcal{O}^\gamma m^\delta a^\varepsilon = K$$
sind vom Masssystem her möglich, wenn K eine dimensionslose Zahl sein soll?

(b) Welche Formeln ergeben sich für die Widerstandskraft $F = ma$?

Bemerkung: Die gefundene Lösung ist bei Schiffbauingenieuren tatsächlich in Gebrauch.

Lösung:

(a) Wir haben

$$\begin{aligned}\dim(\rho^\alpha v^\beta \mathcal{O}^\gamma m^\delta a^\varepsilon) &= \left(cm^{-3}g^1sec^0\right)^\alpha \cdot \left(cm^1g^0sec^{-1}\right)^\beta \cdot \left(cm^2g^0sec^0\right)^\gamma \cdot \left(cm^0g^1sec^0\right)^\delta \cdot \left(cm^1g^0sec^{-2}\right)^\varepsilon \\ &= cm^{-3\alpha+\beta+2\gamma+\varepsilon}g^{\alpha+\delta}sec^{-\beta-2\varepsilon} \\ &= cm^0g^0sec^0 = \dim(K)\end{aligned}$$

Damit K eine dimensionslose Zahl ist, müssen die Summen der Exponenten von cm, g und sec jeweils 0 ergeben. Dies entspricht dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -3\alpha & + & \beta & + & 2\gamma & & & + & \varepsilon & = & 0 \\ \alpha & & & & & + & \delta & & & = & 0 \\ & & -\beta & & & & & - & 2\varepsilon & = & 0. \end{array}$$

Das entsprechende Gauss-Schema ist

$$\begin{array}{rrrrr|r} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\ \hline -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{1. Zeile}\leftrightarrow\text{2. Zeile}} \begin{array}{rrrrr|r} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{2. Zeile}\leftrightarrow\text{3. Zeile}} \begin{array}{rrrrr|r} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{2. Zeile}=-(\text{2. Zeile})} \begin{array}{rrrrr|r} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{3. Zeile}+3\times(\text{1. Zeile})} \begin{array}{rrrrr|r} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{3. Zeile}-\text{2. Zeile}} \begin{array}{rrrrr|r} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{3. Zeile}=\frac{1}{2}\times(\text{3. Zeile})} \begin{array}{rrrrr|r} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \quad (*)$$

und man kann also δ und ε frei wählen, da in der 3. Zeile von $(*)$ drei Zahlen ungleich Null stehen. Setze $\delta = s, \varepsilon = t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Für die restlichen Exponenten findet man mit $(*)$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{2}\delta = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s, \\ \beta &= -2\varepsilon = -2t, \\ \alpha &= -\delta = -s. \end{aligned}$$

Die Formeln vom Typ

$$\rho^{-s} v^{-2t} \mathcal{O}^{\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s} m^s a^t = K$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ ergeben folglich das gewünschte Resultat.

(b) Wenn man in die bei **(a)** erhaltene Formel $s = t = 1$ setzt, um einen Ausdruck zu erhalten, der den Term ma beinhaltet, findet man

$$\rho^{-1} v^{-2} \mathcal{O}^{-1} ma = K.$$

Nach Umformen ergibt dies

$$ma = K\rho v^2 \mathcal{O}.$$

Aus der Formel $F = ma$ folgt also $F = K\rho v^2 \mathcal{O}$.

Bemerkung: Die Konstante K nennt man *Widerstandsbeiwert*.

4. Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$ für $i = 1, 2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit dem Gauss–Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.

(b) Lösen Sie die Aufgabe nochmals mit Hilfe von MATLAB.

Lösung:

(a) Für $i = 1, 2$ entspricht $Ax = b_i$ einem linearen Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3. Wie in Serie 1, Aufgabe 2, kann man beide rechten Seiten im gleichen Gauss-Schema schreiben (der Hauptteil ist gleich):

$$\begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 3 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \xrightarrow{\text{1. Zeile}\leftrightarrow\text{2. Zeile}} \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 6 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{2. Zeile}+3\times(\text{1. Zeile})} \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \xrightarrow[\text{2. Zeile}=\frac{1}{4}\times(\text{2. Zeile})]{\text{1. Zeile}=-(\text{1. Zeile})} \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \quad (*)$$

Für b_1 mit $Ax = b_1$ folgt also:

x_3 beliebig, also $x_3 = t \in \mathbb{R}$ ist ein freier Parameter (aus der 2. Zeile von $(*)$ ersichtlich),
$x_2 + 2x_3 = 1 \implies x_2 = 1 - 2x_3 = 1 - 2t$ (aus der 2. Zeile von $(*)$ ersichtlich),
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1$ (aus der 1. Zeile von $(*)$ ersichtlich)
$\implies x_1 = -1 + 3x_3 + 2x_2 = -1 + 3t + 2(1 - 2t) = -1 + 3t + 2 - 4t = 1 - t.$

Die Lösungsmenge L_1 von $Ax = b_1$ ist also

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für b_2 mit $Ax = b_2$ folgt analog

x_3 beliebig, also $x_3 = s \in \mathbb{R}$ ist ein freier Parameter (aus der 2. Zeile von $(*)$ ersichtlich),
$x_2 + 2x_3 = 3 \implies x_2 = 3 - 2x_3 = 3 - 2s$ (aus der 2. Zeile von $(*)$ ersichtlich),
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2$ (aus der 1. Zeile von $(*)$ ersichtlich)
$\implies x_1 = -2 + 3x_3 + 2x_2 = -2 + 3s + 2(3 - 2s) = -2 + 3s + 6 - 4s = 4 - s.$

Die Lösungsmenge L_2 von $Ax = b_2$ ist somit

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 4-s \\ 3-2s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Siehe Lösung Serie 1, Aufgabe 4.