

## Lösung Serie 4

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 29. Oktober um 14:00 Uhr** ab.  
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01>.

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (a)  $(AB)^T = A^T B^T$ .
- (b)  $(AB)^T = B^T A^T$ .
- (c)  $A^T A$  ist symmetrisch.
- (d)  $AA^T$  ist symmetrisch.
- (e) Ist  $C$  eine beliebige quadratische Matrix, so ist  $C + C^T$  symmetrisch.

**Lösung:** Korrekt sind (b), (c), (d) und (e), da:

(a)  $(AB)^T = A^T B^T$ .

*Die Formel  $(AB)^T = A^T B^T$  ist im Allgemeinen falsch, so auch in diesem Beispiel. Nachrechnen zeigt:*

$$\begin{aligned} (AB)^T &= \left[ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 19 & 23 \\ 21 & 25 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 23 & 25 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -6 & 4 & -8 \\ 15 & 24 & 24 \\ 17 & 17 & 26 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = A^T B^T \end{aligned}$$

*was schon von den Matrixdimensionen her keine Gleichheit sein kann. Aber auch für quadratische Matrizen  $A, B$  derselben Grösse ist die Formel im Allgemeinen falsch.*

✓ (b)  $(AB)^T = B^T A^T$ .

*Richtig! Diese Formel ist sogar im Allgemeinen richtig (sofern das Produkt  $AB$  definiert*

*ist). Rechnung:*  $(AB)^T = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 23 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = B^T A^T$ .

✓ (c)  $A^T A$  ist symmetrisch.

*Ja, es gilt allgemein: Ist  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix, so ist  $A^T A$  eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix, denn  $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ . Und eine Matrix  $M$  ist per Definition genau dann symmetrisch, wenn  $M^T = M$  gilt.*

✓ (d)  $AA^T$  ist symmetrisch.

*Ja, es gilt allgemein: Ist  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix, so ist  $AA^T$  eine symmetrische  $m \times m$ -Matrix, denn  $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$ . Bemerkung:  $A^T A$  und  $AA^T$  sind beide symmetrisch, aber im Allgemeinen nicht gleich (z.B. wenn  $n \neq m$ ).*

✓ (e) Ist  $C$  eine beliebige quadratische Matrix, so ist  $C + C^T$  symmetrisch.

*Ja, es gilt  $(C + C^T)^T = C^T + (C^T)^T = C^T + C = C + C^T$ .*

*Bemerkung: Wäre  $C$  nicht quadratisch, so wäre  $C + C^T$  nicht definiert.*

**Bemerkung:** Es gilt allgemein:  $(AB)^T = B^T A^T$  falls  $A$  eine  $m \times p$  und  $B$  eine  $p \times n$ -Matrix ist. Die Anzahl Spalten von  $A$  und die Anzahl Zeilen von  $B$  (beide gleich  $p$ ) müssen übereinstimmen, damit  $AB$  definiert ist - das Produkt  $B^T A^T$  ist dann automatisch auch definiert.

Es sei  $C = AB$  und  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  bezeichnen die Einträge der jeweiligen Matrizen (der erste Index ist die Zeilennummer, der zweite die Spaltennummer). Weiter seien  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  die Einträge der Matrizen  $A^T$ ,  $B^T$ . Aus der Definition der Transponierten folgt  $\alpha_{ij} = a_{ji}$ ,  $\beta_{ij} = b_{ji}$ , und die Definition der Matrizenmultiplikation liefert

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Nun ist der  $(i, j)$ -te Eintrag der Matrix  $(AB)^T$  gleich (beachte die vertauschten Indizes)

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^p \alpha_{kj} \beta_{ik} = \sum_{k=1}^p \beta_{ik} \alpha_{kj}$$

und dieser Ausdruck entspricht auch dem  $(i, j)$ -ten Eintrag der Matrix  $B^T A^T$ .

2. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} AB & \text{(ii)} BA & \text{(iii)} Ax & \text{(iv)} A^2 := AA \\ \text{(v)} B^2 := BB & \text{(vi)} y^T x & \text{(vii)} yx & \text{(viii)} xy^T \\ \text{(ix)} B^T y & \text{(x)} y^T B. & & \end{array}$$

(b) Lösen Sie (a) nochmals mit Hilfe von MATLAB.

### Lösung:

(a) Es gilt:

$$\text{(i)} AB = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -21 \\ -9 & -1 \\ 12 & 17 \end{pmatrix},$$

$$\text{(iii)} Ax = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -26 \\ 16 \end{pmatrix},$$

$$\text{(iv)} A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -1 & -1 \\ -17 & 15 & -22 \\ -11 & -13 & 21 \end{pmatrix},$$

$$\text{(vi)} y^T x = (1 \ 4 \ -3) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -20,$$

$$\text{(viii)} xy^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \ 4 \ -3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 6 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix},$$

$$\text{(ix)} B^T y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{(x)} y^T B = (1 \ 4 \ -3) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = (-6 \ -1).$$

Die Matrixprodukte (ii)  $BA$ , (v)  $B^2$  und (vii)  $yx$  sind aus Dimensionsgründen nicht definiert.

(b) Die Matrixmultiplikation mit MATLAB.

### 3. Polynominterpolation

Gegeben sind die Funktionswerte  $y_0, y_1, \dots, y_n$  über den Abszissen  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .



- (b) Nach Einsetzen der angegebenen Werte von  $x_i = 0, 1, 2, 3, 4$  und  $y_i = 0, 1, 0, 2, 0$  in das Gleichungssystem aus (a) mit  $n = 4$  erhalten und berechnen wir (wobei Z=Zeile bedeutet)

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	1		$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	1
1	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	$\xrightarrow{2.,3.,4.,5.Z-1.Z}$	0	1	1	1	1	1
1	2	4	8	16	0		0	2	4	8	16	0
1	3	9	27	81	2		0	3	9	27	81	2
1	4	16	64	256	0		0	4	16	64	256	0
$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	1		$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	1
1	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0
$3.Z-2 \times (2.Z), 4.Z-3 \times (2.Z)$	0	1	1	1	1	$\xrightarrow{4.Z-3 \times (3.Z)}$	0	1	1	1	1	1
$5.Z-4 \times (2.Z)$	0	0	2	6	14	$\xrightarrow{3.Z-6 \times (3.Z)}$	0	0	2	6	14	-2
	0	0	6	24	78		0	0	0	6	36	5
	0	0	12	60	252		0	0	0	24	168	8
$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	1		$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	1
1	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0
$5.Z-4 \times (4.Z)$	0	1	1	1	1	$\xrightarrow{(*)}$	0	0	2	6	14	-2
	0	0	0	6	36		0	0	0	6	36	5
	0	0	0	0	24		0	0	0	24	168	-12

Rückwärtseinsetzen ergibt dann

$$a_4 = \frac{-12}{24} = -\frac{1}{2} \quad (\text{aus der 5. Zeile von } (*)),$$

$$a_3 = \frac{5 - 36a_4}{6} = \frac{5 - 36 \cdot (-\frac{1}{2})}{6} = \frac{5 + 18}{6} = \frac{23}{6} \quad (\text{aus der 4. Zeile von } (*)),$$

$$a_2 = \frac{-2 - 14a_4 - 6a_3}{2} = \frac{-2 - 14 \cdot (-\frac{1}{2}) - 6 \cdot \frac{23}{6}}{2} = \frac{-2 + 7 - 23}{2} = -9 \quad (\text{aus der 3. Zeile von } (*)),$$

$$a_1 = 1 - a_4 - a_3 - a_2 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{23}{6} - (-9) = \frac{6+3-23+54}{6} = \frac{20}{3} \quad (\text{aus der 2. Zeile von } (*)),$$

$$a_0 = 0 \quad (\text{aus der 1. Zeile von } (*)).$$

Das Interpolationspolynom  $p(x)$  lautet daher

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\ &= \frac{20}{3}x - 9x^2 + \frac{23}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4. \end{aligned}$$

- (c) Definiere das Kronecker-Symbol  $\delta_{ik}$  durch

$$\delta_{ik} := \begin{cases} 1, & \text{für } i = k, \\ 0, & \text{für } i \neq k. \end{cases}$$

Damit folgt aus der Definition von  $\ell_i(x)$ , dass

$$\begin{aligned} \ell_i(x_k) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} \\ &= \begin{cases} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i=k}}^n \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i=k}}^n 1 = 1, & \text{wenn } i = k \\ \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i \neq k}}^n \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = \underbrace{\frac{x_k - x_k}{x_i - x_k}}_{=0} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, j \neq k}}^n \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = 0, & \text{wenn } i \neq k \end{cases} \\ &= \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = k, \\ 0, & \text{für } i \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Definiere zudem das Polynom

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x).$$

Aus der obigen Gleichung  $\ell_i(x_k) = \delta_{ik}$  folgt nun

$$L(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i \delta_{ik} = y_k.$$

Also erfüllt  $L(x)$  die Bedingungen für das Interpolationspolynom  $p(x)$ .

Für die Werte  $x = 0, 1, 2, 3, 4$  und  $y = 0, 1, 0, 2, 0$ , die in **(b)** gegeben sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 L(x) &= \sum_{i=0}^4 y_i \ell_i(x) \\
 &= 0 \cdot \ell_0(x) + 1 \cdot \ell_1(x) + 0 \cdot \ell_2(x) + 2 \cdot \ell_3(x) + 0 \cdot \ell_4(x) \\
 &= \ell_1(x) + 2\ell_3(x) \\
 &= \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} \cdot \frac{x-4}{1-4} + 2 \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} \cdot \frac{x-4}{3-4} \\
 &= -\frac{1}{6}x(x-2)(x-3)(x-4) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)(x-4) \\
 &= -\left(\frac{1}{6}(x-3) + \frac{1}{3}(x-1)\right)x(x-2)(x-4) \\
 &= -\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x(x^2 - 2x - 4x + 8) \\
 &= -\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\right)(x^3 - 6x^2 + 8x) \\
 &= -\left(\frac{1}{2}x(x^3 - 6x^2 + 8x) - \frac{5}{6}(x^3 - 6x^2 + 8x)\right) \\
 &= -\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 4x^2 - \frac{5}{6}x^3 + 5x^2 - \frac{40}{6}x\right) \\
 &= -\left(\frac{1}{2}x^4 - \left(\frac{18}{6} + \frac{5}{6}\right)x^3 + 9x^2 - \frac{20}{3}x\right) \\
 &= -\frac{1}{2}x^4 + \frac{23}{6}x^3 - 9x^2 + \frac{20}{3}x \\
 &= \frac{20}{3}x - 9x^2 + \frac{23}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \\
 &= p(x).
 \end{aligned}$$

#### 4. Kirchhoffsche Regeln

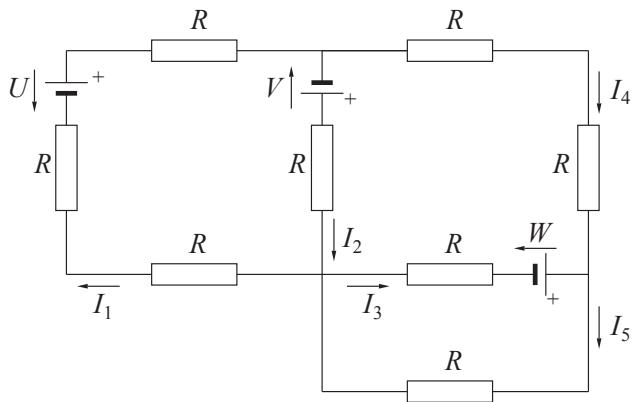
Für elektrische Stromkreise gelten die folgenden zwei Regeln:

- Die Summe der Teilströme in jedem Knoten ist Null.
- Die Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist Null.

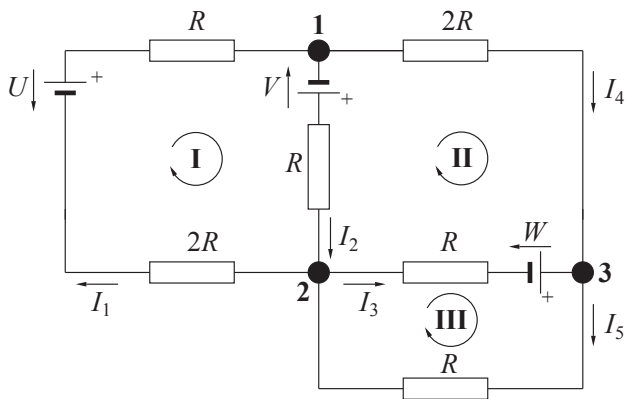
Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für die fünf Teilströme des unten skizzierten Gleichstromkreises und lösen Sie es für

$$R = 300\Omega, \quad U = V = 300V, \quad W = 200V.$$

*Hinweis:* Wählen Sie die Vorzeichen entsprechend den Zählpfeilen!



**Lösung:** Für die Teilströme  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  kann man aus der obigen Skizze die folgenden Gleichungen ablesen:  
(Stromfluss im Uhrzeigersinn, wie angedeutet)



Für die Knoten **1, 2, 3** folgt: (**1.↔1, 2.↔2, 3.↔3**)

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{1.} \quad I_1 - I_2 - I_4 = 0 \\
 \mathbf{2.} \quad -I_1 + I_2 - I_3 + I_5 = 0 \\
 \mathbf{3.} \quad I_3 + I_4 - I_5 = 0
 \end{array}$$

und mit der Formel  $U_R = RI$  folgt für die Maschen **I, II, III** zusätzlich:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{I.} \quad (2R + R)I_1 + RI_2 - U - V = 0 \\
 \mathbf{II.} \quad -RI_2 - RI_3 + 2RI_4 + V + W = 0 \\
 \mathbf{III.} \quad RI_3 + RI_5 - W = 0
 \end{array}$$



oder äquivalent

$$\begin{array}{lcl}
 \text{I.} & 3RI_1 + RI_2 & = U + V \\
 \text{II.} & -RI_2 - RI_3 + 2RI_4 & = -V - W \\
 \text{III.} & RI_3 + RI_5 & = W
 \end{array}$$

Für  $R = 300\Omega$ ,  $U = V = 300V$  und  $W = 200V$  bekommt man daraus die Matrix

$$\begin{array}{ccccc|c}
 I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
 900 & 300 & 0 & 0 & 0 & 600 \\
 0 & -300 & -300 & 600 & 0 & -500 \\
 0 & 0 & 300 & 0 & 300 & 200
 \end{array}$$

Nun multiplizieren wir die 4. Zeile mit  $\frac{1}{300}$ , die 5. Zeile und die 6. Zeile je mit  $\frac{1}{100}$  und erhalten das äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc|c}
 I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & -3 & -3 & 6 & 0 & -5 \\
 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2
 \end{array}$$

Dann addieren wir die 1. Zeile zur 2. Zeile und multiplizieren die 3. Zeile mit  $(-1)$ , um das folgende Gleichungssystem zu erhalten

$$\begin{array}{ccccc|c}
 I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & -3 & -3 & 6 & 0 & -5 \\
 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2
 \end{array}$$

Nun subtrahieren wir die 3. Zeile von der 2. Zeile und subtrahieren  $3 \times (1. \text{ Zeile})$  von der 4. Zeile:

$$\begin{array}{ccccc|c}
 I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
 0 & -3 & -3 & 6 & 0 & -5 \\
 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2
 \end{array}$$

Nun addieren wir  $3 \times$ (3. Zeile) zur 6. Zeile und multiplizieren die 5. Zeile mit 4:

$$\begin{array}{ccccc|c}
 I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
 0 & -12 & -12 & 24 & 0 & -20 \\
 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 2
 \end{array}$$

Jetzt vertauschen wir die Zeilen: 1. Zeile = 1. Zeile, 2. Zeile = 4. Zeile, 3. Zeile = 3. Zeile, 4. Zeile = 6. Zeile, 5. Zeile = 5. Zeile, 6. Zeile = 2. Zeile:

$$\begin{array}{ccccc|c}
 I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 2 \\
 0 & -12 & -12 & 24 & 0 & -20 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Nun addieren wir  $3 \times$ (2. Zeile) zur 5. Zeile:

$$\begin{array}{ccccc|c}
 I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 2 \\
 0 & 0 & -12 & 33 & 0 & -14 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Dann subtrahieren wir  $12 \times$ (3. Zeile) von der 5. Zeile:

$$\begin{array}{ccccc|c}
 I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 45 & -12 & -14 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Zuletzt addieren wir  $15 \times$ (4. Zeile) zur 5. Zeile und erhalten nach Anwendung des kompletten

Gaussverfahrens das Schema

$$\begin{array}{ccccc|c}
 I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \quad (*) \\
 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 78 & 16 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen findet man mit  $A = \frac{V}{\Omega}$  die Werte

$$I_5 = \frac{16}{78}A = \frac{8}{39}A \quad (\text{aus der 5. Zeile von } (*)),$$

$$I_4 = \frac{2A - 6I_5}{-3} = -\frac{2 - \frac{48}{39}}{3}A = -\frac{78 - 48}{3 \cdot 39}A = -\frac{30}{3 \cdot 39}A = -\frac{10}{39}A \quad (\text{aus der 4. Zeile von } (*)),$$

$$I_3 = I_5 - I_4 = \frac{8}{39}A - \left(-\frac{10}{39}A\right) = \frac{18}{39}A \quad (\text{aus der 3. Zeile von } (*)),$$

$$I_2 = \frac{2A - 3I_4}{4} = \frac{2 - 3 \cdot \left(-\frac{10}{39}\right)}{4}A = \frac{78 + 30}{4 \cdot 39}A = \frac{108}{4 \cdot 39}A = \frac{27}{39}A \quad (\text{aus der 2. Zeile von } (*)),$$

$$I_1 = I_4 + I_2 = -\frac{10}{39}A + \frac{27}{39}A = \frac{17}{39}A \quad (\text{aus der 1. Zeile von } (*)).$$

Dies lässt sich zusammenfassend auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 17A \\ 27A \\ 18A \\ -10A \\ 8A \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.436A \\ 0.692A \\ 0.462A \\ -0.256A \\ 0.205A \end{pmatrix}.$$