D-MAVT / D-MATL Lineare Algebra I HS 2021
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Lösung Serie 5

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 5. November um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01.

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Seien u und v Lösungen des LGS $Ax = b$ mit n Unbekannten. Der Rang des LGS sei r. Falls $n = r$ gilt, so folgt $u = v$.

(b) Sei $Ax = 0$ ein homogenes LGS und $x \neq 0$ eine Lösung davon. Dann ist der Rang r des Gleichungssystems gleich der Anzahl n der Unbekannten.

(c) Sei $Ax = b$ ein LGS, das keine Lösung besitzt. Dann ist sein Rang r grösser als die Anzahl m seiner Gleichungen.

(d) Sei $Ax = b$ ein LGS mit n Unbekannten und ebensovielen Gleichungen. Sei $u \neq 0$ eine Lösung des homogenen LGS $Ax = 0$ und v eine Lösung von $Ax = b$. Dann hat $Ax = b$ noch unendlich viele weitere Lösungen.

Lösung: Korrekt sind (a) und (d), da:

✓ (a) Seien u und v Lösungen des LGS $Ax = b$ mit n Unbekannten. Der Rang des LGS sei r. Falls $n = r$ gilt, so folgt $u = v$.
Richtig. Dies ist Satz 1.2 aus der Vorlesung der Woche 3.

(b) Sei $Ax = 0$ ein homogenes LGS und $x \neq 0$ eine Lösung davon. Dann ist der Rang r des Gleichungssystems gleich der Anzahl n der Unbekannten.
Falsch. Laut Korollar 1.3 aus der Vorlesung der Woche 3 hat ein homogenes LGS genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn $r < n$.

(c) Sei $Ax = b$ ein LGS, das keine Lösung besitzt. Dann ist sein Rang r grösser als die Anzahl m seiner Gleichungen.
Falsch. Laut Korollar 1.5 aus der Vorlesung der Woche 4 ist das LGS genau dann nicht für alle b lösbar, wenn $r < m$.

✓ (d) Sei $Ax = b$ ein LGS mit n Unbekannten und ebensovielen Gleichungen. Sei $u \neq 0$ eine Lösung des homogenen LGS $Ax = 0$ und v eine Lösung von $Ax = b$. Dann hat $Ax = b$ noch unendlich viele weitere Lösungen.
Richtig. Weil das homogene LGS eine nicht-triviale Lösung besitzt, ist der Rang $r < n$ nach Korollar 1.3 aus der Vorlesung der Woche 3. Und weil das LGS $Ax = b$ mit v eine Lösung besitzt, kann diese nach Satz 1.2 aus der Vorlesung der Woche 3 nicht eindeutig sein. Daher muss $Ax = b$ unendlich viele Lösungen besitzen.
Konkret ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $v + \lambda u$ eine Lösung von $Ax = b$:
Denn es gilt nämlich

$$\begin{aligned} A(v + \lambda u) &= Av + A\lambda u \\ &= Av + \lambda Au \\ &= b + \lambda \cdot 0 \\ &= b. \end{aligned}$$

2. *Ränge einer Menge linearer Gleichungssysteme*
Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von a – den Rang des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & (a^2+3a)x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

Lösung: Wir haben das Schema

$$\begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & a^2+3a & 0 \\ -2 & -1 & a & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow[4.Z+2\times(1.Z)]{2.Z-1.Z,\,3.Z-1.Z} \begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & a^2+3a-1 & 0 \\ 0 & 1 & a+6 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow[4.Z+2.Z]{3.Z+2.Z} \begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a-4 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{3.Z\leftrightarrow 4.Z} \begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a-4 & 0 \end{array} \quad (*)$$

Es gilt $a + 1 = 0$ (kommt aus der 3. Zeile von $(*)$), genau dann wenn $a = -1$ ist.
Es gilt $a^2 + 3a - 4 = 0$ (kommt aus der 4. Zeile von $(*)$), wenn

$$a = \frac{-3 - \sqrt{9+16}}{2} \;\text{ oder }\; a = \frac{-3 + \sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow a = -4 \;\text{ oder }\; a = 1,$$

was aus der Formel

$$xa^2 + ya + z = 0 \Longleftrightarrow a = a_1 = \frac{-y - \sqrt{y^2 - 4xz}}{2x} \quad \text{oder} \quad a = a_2 = \frac{-y + \sqrt{y^2 - 4xz}}{2x}$$

folgt.
Dies gilt auch, da wir die folgende Faktorisierung haben

$$a^2 + 3a - 4 = a^2 + 4a - a + 4 = (a + 4)(a - 1) = 0.$$

Der Rang des Gleichungssystems ist 4, falls $a + 1 \neq 0$ und $a^2 + 3a - 4 \neq 0$, also für $a \notin \{-4, -1, 1\}$. Dies gilt, da wir die 1. Zeile und die 2. Zeile von $(*)$ nicht "verändern" und auch nicht zur weiteren "Zeilenelimination" verwenden können.
Der Rang des Gleichungssystems ist 3, falls $a \in \{-4, -1, 1\}$, da niemals gleichzeitig $a+1 = 0$ und $a^2 + 3a - 4 = 0$ gilt, weil $-1 \notin \{-4, 1\}$.
Zusammenfassend kann man sagen

$$\begin{aligned} a \in &\{-4, -1, 1\} \Longrightarrow \text{Rang des Gleichungssystems} = 3, \\ a \notin &\{-4, -1, 1\} \Longrightarrow \text{Rang des Gleichungssystems} = 4. \end{aligned}$$

3. *Kommutierende Matrizen*
Bestimmen Sie, welche Matrizen B mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

kommutieren, d.h. für welche Matrizen B die Gleichung $AB = BA$ gilt.

Lösung: Sei die Matrix B gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Jede 2×2-Matrix B hat diese allgemeine Struktur, welche wir daher annehmen können.
Damit man die gewünschte Gleichung $AB = BA$ erhält, müssen die zwei Matrizen AB und BA koeffizientenweise übereinstimmen. Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 3b_{21} & 3b_{22} \end{pmatrix}$$

und

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 2b_{11} + 3b_{12} \\ b_{21} & 2b_{21} + 3b_{22} \end{pmatrix}.$$

Daher erhalten wir die Matrixgleichung

$$AB = BA \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 3b_{21} & 3b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 2b_{11} + 3b_{12} \\ b_{21} & 2b_{21} + 3b_{22} \end{pmatrix}.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich erhält man das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_{11} + 2b_{21} &= b_{11} \\ b_{12} + 2b_{22} &= 2b_{11} + 3b_{12} \\ 3b_{21} &= b_{21} \\ 3b_{22} &= 2b_{21} + 3b_{22}. \end{aligned}$$

In der dritten Zeile dieses Gleichungssystems steht die Bedingung $3b_{21} = b_{21}$ und somit ist $b_{21} = 0$.
Mit $b_{21} = 0$ heissen die erste Zeile und die vierte Zeile des obigen Gleichungssystems nun neu $b_{11} + 2b_{21} = b_{11} = b_{11}$ und $3b_{22} = 2b_{21} + 3b_{22} = 3b_{22}$ und diese beiden Gleichungen sind für alle $b_{11}, b_{22} \in \mathbb{R}$ sicherlich erfüllt. Diese Informationen sagen uns, dass wir zwei der drei Variablen b_{11}, b_{12}, b_{22} frei in $\mathbb{R}$ wählen können und dass $b_{21} = 0$ ist.
Wir wählen nun $b_{11}, b_{12} \in \mathbb{R}$ frei.
Somit erhalten wir, dass die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} b_{11} &= s \in \mathbb{R}, \\ b_{12} &= t \in \mathbb{R}, \\ b_{21} &= 0, \\ b_{22} &= s + t \end{aligned}$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Hierbei folgt $b_{22} = s + t$ aus der zweiten Gleichung $b_{12} + 2b_{22} = 2b_{11} + 3b_{12}$ des obigen Gleichungssystems, da

$$b_{12} + 2b_{22} = 2b_{11} + 3b_{12} \Longleftrightarrow 2b_{22} = 2b_{11} + 2b_{12} \Longleftrightarrow b_{22} = b_{11} + b_{12}.$$

Folglich erfüllen genau die Matrizen B der Form

$$B = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s+t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{R}$$

die Bedingung $AB = BA$.

4. *Kreuzprodukt zweier Vektoren*
Es seien $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ und $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$. Dann ist das Vektorprodukt von x und y definiert als

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine 3×3-Matrix B so, dass

$$x \times y = By.$$

(b) Zeigen Sie, dass $x \times y$ senkrecht auf x und y steht.

(c) Rechnen Sie eine der folgenden Identitäten nach:
$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ (Grassmann-Identität)
$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$ (Jacobi-Identität)
$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d)$ (Lagrange-Identität)

(d) Verwenden Sie die obige Lagrange-Identität um zu zeigen, dass

$$\|a \times b\| = \|a\|\|b\| \sin(\varphi)$$

gilt, wobei $0 \leq \varphi \leq \pi$ der von a und b eingeschlossene Winkel ist. Dieser Satz besagt, dass die Länge des Vektors $a \times b$ gleich der Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist.

Hinweis: Es gilt

$$a \cdot b = \|a\|\|b\| \cos(\varphi).$$

Lösung:

(a) Die Matrix B muss aus Dimensionsgründen eine 3×3-Matrix sein, da die Vektoren $x \times y \in \mathbb{R}^3$ und $y \in \mathbb{R}^3$ beides 3-dimensionale Vektoren sind.
Es muss daher gelten

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 \\ b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{=B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{=y}.$$

Daraus erhält man $b_{11} = 0$, $b_{12} = -x_3$, $b_{13} = x_2$, $b_{21} = x_3$, $b_{22} = 0$, $b_{23} = -x_1$, $b_{31} = -x_2$, $b_{32} = x_1$, $b_{33} = 0$ und kann die Struktur von B direkt ablesen zu

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

sodass gilt

$$x \times y = By.$$

(b) Zwei Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

gleich Null ist.
Nachrechnen ergibt

$$\begin{aligned}
x \cdot (x \times y) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\
&= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_2x_1y_3 + x_3x_1y_2 - x_3x_2y_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
y \cdot (x \times y) &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\
&= y_1(x_2y_3 - x_3y_2) + y_2(x_3y_1 - x_1y_3) + y_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2 + y_2x_3y_1 - y_2x_1y_3 + y_3x_1y_2 - y_3x_2y_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daher steht der Vektor $x \times y$ senkrecht auf dem Vektor x und dem Vektor y.

(c) Grundsätzlich lassen sich alle drei Identitäten direkt mit den Definitionen nachrechnen. Die Grassmann-Identität rechnet man wie folgt nach:

$$\begin{aligned}
a \times (b \times c) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= (a \cdot c)b - (a \cdot b)c.
\end{aligned}$$

Die Jacobi-Identität rechnet man wie folgt nach:

$$
\begin{aligned}
&a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_2a_3 - c_3a_2 \\ c_3a_1 - c_1a_3 \\ c_1a_2 - c_2a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2(c_1a_2 - c_2a_1) - b_3(c_3a_1 - c_1a_3) \\ b_3(c_2a_3 - c_3a_2) - b_1(c_1a_2 - c_2a_1) \\ b_1(c_3a_1 - c_1a_3) - b_2(c_2a_3 - c_3a_2) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} c_2(a_1b_2 - a_2b_1) - c_3(a_3b_1 - a_1b_3) \\ c_3(a_2b_3 - a_3b_2) - c_1(a_1b_2 - a_2b_1) \\ c_1(a_3b_1 - a_1b_3) - c_2(a_2b_3 - a_3b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)+b_2(c_1a_2-c_2a_1)-b_3(c_3a_1-c_1a_3)+c_2(a_1b_2-a_2b_1)-c_3(a_3b_1-a_1b_3) \\ a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_2a_3-c_3a_2)-b_1(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_2b_3-a_3b_2)-c_1(a_1b_2-a_2b_1) \\ a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_3a_1-c_1a_3)-b_2(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_3b_1-a_1b_3)-c_2(a_2b_3-a_3b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3+b_2c_1a_2-b_2c_2a_1-b_3c_3a_1+b_3c_1a_3+c_2a_1b_2-c_2a_2b_1-c_3a_3b_1+c_3a_1b_3 \\ a_3b_2c_3-a_3b_3c_2-a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+b_3c_2a_3-b_3c_3a_2-b_1c_1a_2+b_1c_2a_1+c_3a_2b_3-c_3a_3b_2-c_1a_1b_2+c_1a_2b_1 \\ a_1b_3c_1-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3+a_2b_3c_2+b_1c_3a_1-b_1c_1a_3-b_2c_2a_3+b_2c_3a_2+c_1a_3b_1-c_1a_1b_3-c_2a_2b_3+c_2a_3b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Die Lagrange-Identität rechnet man wie folgt nach:

$$\begin{aligned}
(a \times b) \cdot (c \times d) &= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2d_3 - c_3d_2 \\ c_3d_1 - c_1d_3 \\ c_1d_2 - c_2d_1 \end{pmatrix} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot (c_2d_3 - c_3d_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot (c_3d_1 - c_1d_3) \\
&\quad + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (c_1d_2 - c_2d_1) \\
&= a_2b_3c_2d_3 - a_2b_3c_3d_2 - a_3b_2c_2d_3 + a_3b_2c_3d_2 + a_3b_1c_3d_1 - a_3b_1c_1d_3 \\
&\quad - a_1b_3c_3d_1 + a_1b_3c_1d_3 + a_1b_2c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2 + a_2b_1c_2d_1 \\
&= a_1c_1b_1d_1 + a_1c_1b_2d_2 + a_1c_1b_3d_3 + a_2c_2b_1d_1 + a_2c_2b_2d_2 + a_2c_2b_3d_3 + a_3c_3b_1d_1 \\
&\quad + a_3c_3b_2d_2 + a_3c_3b_3d_3 - b_1c_1a_1d_1 - b_1c_1a_2d_2 - b_1c_1a_3d_3 - b_2c_2a_1d_1 - b_2c_2a_2d_2 \\
&\quad - b_2c_2a_3d_3 - b_3c_3a_1d_1 - b_3c_3a_2d_2 - b_3c_3a_3d_3 \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \cdot (b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) \\
&\quad - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot (a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3) \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \right) - \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \right) \\
&= (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Grassmann-Identität kann man die Jacobi-Identität zudem sehr elegant herleiten:

$$\begin{aligned}
&a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) \\
&= (a \cdot c)b - (a \cdot b)c + (b \cdot a)c - (b \cdot c)a + (c \cdot b)a - (c \cdot a)b \\
&= \underbrace{(a \cdot c - c \cdot a)}_{=0} b + \underbrace{(b \cdot a - a \cdot b)}_{=0} c + \underbrace{(c \cdot b - b \cdot c)}_{=0} a \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass das Skalarprodukt symmetrisch ist, das heisst $a \cdot b = b \cdot a$, da

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = b \cdot a.$$

(d) In der untenstehenden Berechnung werden wir im ersten Schritt die Formel

$$||x||^2 = ||x|| \cdot ||x|| \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} = x \cdot x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

verwenden, welche aus dem Hinweis folgt. Im letzten Schritt werden wir den trigonometrischen Pythagoras Satz

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$$

verwenden.
Aus der Lagrange-Identität und dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 &= (a \times b) \cdot (a \times b) \\
&\overset{\text{Lagrange-}}{\underset{\text{Identität}}{=}} (a \cdot a)(b \cdot b) - (b \cdot a)(a \cdot b) \\
&= (a \cdot a)(b \cdot b) - (a \cdot b)(a \cdot b) \\
&= (a \cdot a)(b \cdot b) - (a \cdot b)^2 \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} \|a\|^2\|b\|^2 - (\|a\|\|b\| \cos(\varphi))^2 \\
&= \|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2 \cos^2(\varphi) \\
&= \|a\|^2\|b\|^2(1 - \cos^2(\varphi)) \\
&= \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2(\varphi).
\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen erhält man das gewünschte Resultat

$$||a \times b|| = ||a|| \cdot ||b|| \cdot \sin(\varphi),$$

da $0 \leq \varphi \leq \pi$.