Lösung Serie 8

Diese Serie besteht nur aus Multiple Choice-Aufgaben, die auf https://echo.ethz.ch zu lösen sind. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 26. November um 14:00 Uhr** ab.

1. Bestimmen Sie das Matrixprodukt $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung: Korrekt ist nur (b), da:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

✓ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Berechnen Sie den Matrixterm

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{7}{10} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ \frac{7}{9} & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -\frac{46}{15} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -16 \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(e) Keine der genannten Möglichkeiten.

Lösung: Korrekt ist nur (e), da:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{7}{10} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ \frac{7}{9} & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -\frac{46}{15} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -16 \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

✓ (e) Keine der genannten Möglichkeiten.

Denn es gilt:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ \frac{10}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{4}{15} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ \frac{10}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{4}{15} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+0 & 8+2 \\ \frac{50}{15} - \frac{4}{15} & \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ \frac{46}{15} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie die Inverse B^{-1} der 2×2-Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Die Matrix B ist nicht invertierbar.

Lösung: Korrekt ist nur (b), da:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

✓ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Die Matrix B ist nicht invertierbar.

Denn es gilt:

1. Weg: Mit Hilfe der Formel für die 2×2-Matrixinverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

von $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, folgt sofort, dass

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Weg: Man berechnet (da mögliche Lösungen bereits gegeben sind), dass

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben sei die 3×2-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser möchten wir die erste Spalte $A^{(1)}$ extrahieren. Das heisst, das Produkt von rechts oder links mit einer weiteren Matrix ist die erste Spalte $A^{(1)}$ von A.
Für welche der folgenden Möglichkeiten ist dies gegeben?

(a) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(e) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung: Korrekt ist nur (e), da:

(a) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Falsch, diese Multiplikation ist aus Dimensionsgründen $((2\times 2)\cdot(3\times 2))$ *nicht definiert.*

(b) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Falsch, dies ergibt eine $((3\times 2)\cdot(2\times 2))$ 3×2*-Matrix, die aus der Matrix* A *durch ersetzen der zweiten Spalte* $A^{(2)}$ *von* A *mit Nullen entsteht, da*

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Falsch, dies ergibt die zweite Zeile von A*, da*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

(d) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Falsch, diese Multiplikation ist aus Dimensionsgründen $((2\times 1)\cdot(3\times 2))$ *nicht definiert.*

✓ (e) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Richtig, da

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = A^{(1)}.$$

5. Sei A eine 4×4-Matrix. Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

(i) $Ax = b$ hat für jedes b höchstens eine Lösung.

(ii) $Ax = b$ hat für jedes b mindestens eine Lösung.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Lösung: Korrekt ist (a), da:

✓ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Siehe den Satz 2.8 ($*$) in dem Buch "K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage"

(iv) A ist regulär $\iff$ (iii) Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$ ($*$)

und benutze folgende Äquivalenz:

(i) $Ax = b$ hat für jedes b höchstens eine Lösung.
$\iff$ (iii) Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.

Die obige Äquivalenz ist wahr, denn (i) mit $b = 0$ impliziert (iii) und die Negation $\neg$(i) von (i)

$\neg$(i) $Ax = b$ hat für mindestens ein b zwei Lösungen

(es existiert also ein b mit zwei Lösungen $x_1 \neq x_2$), führt zu der nicht-trivialen Lösung $x = x_1 - x_2 \neq 0$ des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$, da

$$A\underbrace{(x_1 - x_2)}_{=:x\neq 0} = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$$

und führt damit zur Aussage $\neg$(iii)

$\neg$(iii) Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nicht nur die triviale Lösung $x = 0$.

Daher gilt (i)$\iff$(iii).
Nun gilt:

$$\text{(i)} \iff \text{(iii)} \overset{(*)}{\iff} \text{(iv) } A \text{ ist regulär} \iff \text{(ii)},$$

da $x = A^{-1}b$ eine Lösung von $Ax = b$ ist, wenn A^{-1} existiert.
Die Äquivalenz (iv) A ist regulär$\Longleftrightarrow$(ii), sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\text{(iv) } A \text{ ist regulär} \Longrightarrow [Ax = b \Longrightarrow x = A^{-1}b] \Longrightarrow \text{(ii)},\\
&\text{(ii)} \underset{\text{Woche 4}}{\overset{\text{Korollar 1.6}}{\Longrightarrow}} Ax = b \text{ ist für alle } b \text{ eindeutig lösbar}\\
&\qquad \Longrightarrow Ax = 0 \text{ ist eindeutig lösbar mit } x = 0\\
&\qquad \overset{(*)}{\Longrightarrow} \text{(iv) } A \text{ ist regulär.}
\end{aligned}$$

Für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt zudem:

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } Ax = b \text{ hat für jedes } b \text{ höchstens eine Lösung}\\
&\Longleftrightarrow \text{Die Abbildung } A \text{ ist injektiv}\\
&\Longleftrightarrow \text{(iii) } [Ax = 0 \Longrightarrow x = 0]\\
&\Longleftrightarrow A \text{ hat vollen Rang}\\
&\Longleftrightarrow \text{Die Abbildung } A \text{ ist surjektiv und injektiv}\\
&\Longleftrightarrow \text{Die Abbildung } A \text{ ist bijektiv}\\
&\Longleftrightarrow \text{(iv) } A \text{ ist regulär und } A^{-1} \text{ existiert daher}\\
&\Longleftrightarrow \text{(ii) } Ax = b \text{ hat für jedes } b \text{ mindestens eine Lösung.}
\end{aligned}$$

6. Für die reelle 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und den reellen Vektor $b = (1, 2, 0)^T = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ...

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Lösung: Korrekt ist nur (a), da:

✓ (a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Damit das Gleichungssystem lösbar ist, muss sich b als Linearkombination der Spalten $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ von A ausdrücken lassen.
Da die dritte Spalte $A^{(3)} = 2A^{(1)}$ nur das zweifache der ersten Spalte $A^{(1)}$ ist, können wir diese ignorieren (da ein beliebiges Vielfaches der dritten Spalte bereits ein Vielfaches der ersten Spalte ist und daher überflüssig) und versuchen b als Linearkombination

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{=b} = \underbrace{\lambda_1}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{=A^{(1)}} + \underbrace{\lambda_2}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{=A^{(2)}} + \underbrace{\lambda_3}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}}_{=A^{(3)}} = \underbrace{\lambda_4}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{=A^{(1)}} + \underbrace{\lambda_2}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{=A^{(2)}}$$

der ersten beiden Spalten $A^{(1)}, A^{(2)}$ zu schreiben. Dies ist aber nicht möglich, da die dritte Komponente von b Null ist und daher der erste Spaltenvektor $A^{(1)}$ in der obigen Linearkombination nicht vorkommen darf und somit b also ein Vielfaches der zweiten Spalte $A^{(2)}$ sein müsste, was nicht der Fall ist, da $A^{(2)}$ sowohl positive als auch negative Komponenten besitzt, aber b jedoch nicht.

Alternativ kann man den Gauss-Algorithmus verwenden, um das System mit rechter Seite b in Zeilenstufenform zu bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3.Z-\frac{1}{2}\times(1.Z)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{3.Z-\frac{1}{2}\times(2.Z)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right) (*).$$

Damit sieht man aus $(*)$ sofort, dass es keine Lösung geben kann, da $-3/2 \neq 0$.

7. Sei A eine 2×3-Matrix. Dann existiert eine 3×2-Matrix B, welche nicht die Nullmatrix ist, aber trotzdem gilt $AB = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Lösung: Korrekt ist (a), da:

✓ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Für eine 2×3-Matrix A gibt es im Gaussendschema immer mindestens eine Nicht-Pivotspalte, da die Matrixdimensionen von A 2 und 3 sind und $2 \neq 3$ gilt. Damit lassen sich nicht-triviale

Lösungen von $Ax = 0$ mit einem freien Parameter für das homogene System finden.
Sei also

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

eine solche nicht-triviale Lösung von $Ax = 0$ und definiere

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix} \left(\neq \text{Nullmatrix} = 0_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Dann ist

$$AB = A \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot x & A \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

die 2×2-Nullmatrix $0_2 = 0_{2\times 2}$.
Daher konnten wir für jede 2×3-Matrix A eine 3×2-Matrix B konstruieren, welche nicht die Nullmatrix ist, sodass $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt.

8. Für die reelle 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ ...

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Lösung: Korrekt ist nur (c), da:

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

✓ (c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Wir lesen den Rang der Matrix A ab, indem wir erkennen, dass die erste Spalte $A^{(1)}$ und die dritte Spalte und $A^{(3)}$ linear abhängig sind, da

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A^{(1)}.$$

Somit ist $\text{Rang}(A) = 2$, da die beiden Spalten $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ von A wegen den Nulleinträgen von $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ (einer der beiden Nulleinträge genügt bereits), zwangsläufig linear unabhängig sein müssen. Da A eine 3×3-Matrix ist, muss das homogene Gleichungssystem Lösungen mit einem $(= 3 - \text{Rang}(A) = 3 - 2 = 1)$ freien Parameter besitzen.
Falls wir den Rang von A nicht direkt ablesen können, kann man auch den Gauss-Algorithmus anwenden um die Matrix A in Zeilenstufenform zu bringen (siehe Aufgabe 6 oben) und berechnet auf diese Weise mit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3.Z - \frac{1}{2} \times (1.Z)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{3.Z - \frac{1}{2} \times (2.Z)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right),$$

ebenfalls $\text{Rang}(A) = 2$.

9. Für die reelle 4×4-Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -12 & a^2 - 7 \\ 0 & -1 & 7a + 5 & 5 \end{pmatrix}$$

gilt:

(a) Für $a = 1$ ist B nicht invertierbar.

(b) $\text{Rang}(B) \geq 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

(c) Für $a = 0$ ist $\det(B) = 0$.

Lösung: Korrekt sind (b) und (c), da:

(a) Für $a = 1$ ist B nicht invertierbar.

✓ (b) $\text{Rang}(B) \geq 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

✓ (c) Für $a = 0$ ist $\det(B) = 0$.

Wir bringen die Matrix B mit dem Gauss-Algorithmus auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -12 & a^2-7 \\ 0 & -1 & 7a+5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[3.Z+2\times(1.Z)]{2.Z-1.Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & a^2-9 \\ 0 & -1 & 7a+5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[4.Z-2.Z]{3.Z+2\times(2.Z)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+1 \\ 0 & 0 & 7a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3.Z\leftrightarrow 4.Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 7a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+1 \end{pmatrix} (*).$$

Damit lesen wir aus $(*)$ die richtigen Aussagen anhand der entstehenden Nullzeilen (3. Zeile und 4. Zeile) von B ab, da gilt:

(c) $a = 0 \Longrightarrow \mathrm{Rang}(B) = 3 < 4 \Longrightarrow \det(B) = 0$ (aus der 3. Zeile von $(*)$),

(b) $\mathrm{Rang}(B) \geq 3 \;\; \forall a \in \mathbb{R}$, da $a^2 + 1 = 0$ für kein $a \in \mathbb{R}$ gilt (aus der 4. Zeile von $(*)$),

(a) $a = 1 \Longrightarrow \mathrm{Rang}(B) = 4 \Longrightarrow B$ ist invertierbar (regulär) und B^{-1} existiert daher (aus 3. und 4. Zeile

10. Der Rang der 3×4-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

beträgt...

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

Lösung: Korrekt ist nur (c), da:

(a) 0.

(b) 1.

✓ (c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

1. Weg: Berechnung der Anzahl Linear unabhägiger Spalten oder Zeilen von A

Der Rang von A ist die Anzahl linear unabhängiger Spalten oder Zeilen von A. Die ersten zwei Zeilen von A sind linear unabhängig, weil

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wegen den Nulleinträgen (einer genügt bereits),

aber die dritte Zeile von A ergibt sich als Summe der ersten beiden, da

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\text{Rang}(A) = 2$.

2. Weg: Mit dem Gauss-Algorithmus berechnet man

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3.Z-3\times(2.Z)]{1.Z-2\times(2.Z)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3.Z-1.Z]{1.Z\leftrightarrow 2.Z} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (*).$$

Aus $(*)$ ergibt sich wiederum sofort $\text{Rang}(A) = 2$.

11. Seien A und B zwei symmetrische Matrizen. Dann ist das Matrixprodukt AB auch symmetrisch.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Lösung: Korrekt ist nur (b), da:

(a) Richtig.

✓ (b) Falsch.

Im Allgemeinen ist die Aussage falsch, da die beiden Matrizen A und B kommutieren müssten, d.h. $AB = BA$, damit das Produkt wieder symmetrisch ist, da dann mit $A^T = A$ und $B^T = B$ gilt

$$(AB)^T = (BA)^T = A^T B^T = AB.$$

Am einfachsten zeigt ein Gegenbeispiel, dass die allgemeine Aussage nicht gilt:

Es seien die beiden Matrizen A und B gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Matrizen A und B sind symmetrisch, da $A^T = A$ und $B^T = B$ gilt, aber ihr Matrixprodukt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ist es nicht, da

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = AB.$$

12. Gegeben sei eine orthogonale Matrix A mit Inverser A^{-1}.
Dann gilt:

(a) $A^{-1} = A^T$

(b) $A^{-1} = 2A$

(c) $A^{-1} = -A$

(d) Die Inverse A^{-1} existiert nicht.

(e) Keine der genannten Möglichkeiten.

Lösung: Korrekt ist nur (a), da:

✓ (a) $A^{-1} = A^T$
Richtig, denn Orthogonalität ist genau über diese Eigenschaft definiert und $A^T A = \mathbb{I}$ ist nur eine andere Form dies niederzuschreiben, da

$$A^T A = \mathbb{I} \iff A^T = \mathbb{I} \cdot A^{-1} = A^{-1}.$$

(b) $A^{-1} = 2A$
Dies ist nie möglich für eine orthogonale Matrix A, da

$$A^{-1} = 2A \iff A^T = A^{-1} = 2A \iff A^T = 2A,$$

was impliziert, dass für die erste Spalte $A^{(1)}$ von A gilt, dass

$$1 = \left|\left|A^{(1)}\right|\right| = 2 \cdot ||\textit{Erste Zeile}(A)|| = 2 \cdot 1 = 2 \Longrightarrow \textit{ein Widerspurch zu } 1 \neq 2,$$

weil die Zeilen und die Spalten von einer orthogonalen Matrix A normiert sind.

(c) $A^{-1} = -A$
Für gewisse orthogonale Matrizen A kann dies richtig sein, zum Beispiel für die orthogonale Matrix

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

im Allgemeinen ist es jedoch falsch, da

$$A^{-1} = -A \iff \mathbb{I} = -A^2 \iff A^T = -A^T A^2 \iff A^T = -A$$

und

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \;\; A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -A,$$

aber die Matrix A ist nicht orthogonal, da ihre Spalten nich normiert sind.

(d) Die Inverse A^{-1} existiert nicht.
Falsch, da $A^{-1} = A^T$.

(e) Keine der genannten Möglichkeiten.

13. Gegeben seien die beiden 2×2-Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) A_1 ist nicht orthogonal.

(b) A_2 ist nicht orthogonal, aber ihre Inverse A_2^{-1} ist es.

Lösung: Korrekt ist nur (a), da:

✓ (a) A_1 ist nicht orthogonal.
Richtig, die Spalten $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}$ von A sind zwar normiert, weil

$$\left\|A_1^{(1)}\right\| = \left\|A_1^{(2)}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1,$$

aber das Skalarpodukt beider Spalten ist 1 – sie stehen also nicht orthogonal zueinander, da

$$A_1^{(1)} \cdot A_1^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Auch ist A_1 noch nicht einmal invertierbar, da $A_1^{(1)} = A_1^{(2)}$ (zwei linear abhängige Spaltenvektoren), aber jede orthogonale Matrix ist invertierbar.

(b) A_2 ist nicht orthogonal, aber ihre Inverse A_2^{-1} ist es.
Falsch. Es ist zwar richtig, dass A_2 nicht orthogonal ist, da die zweite Spalte $A_2^{(2)}$ von A_2 nicht normiert ist, weil

$$\left|\left|A_2^{(2)}\right|\right| = \left|\left|\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{2^2+0^2} = \sqrt{4} = 2 \neq 1,$$

aber dann ist auch automatisch die Inverse A_2^{-1} nicht orthogonal. Denn eine Matrix A ist orthogonal genau dann, wenn die Inverse A^{-1} es ist, was aus

$$A^TA = \mathbb{I}_2 \Longleftrightarrow A^{-1} = A^T \Longleftrightarrow A = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \Longleftrightarrow (A^{-1})^TA^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{I}_2$$

sofort folgt.

14. Gegeben seien die beiden 2×2-Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\4 & 3\end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) A_1 ist orthogonal.

(b) A_2 ist orthogonal.

(c) Keine der beiden genannten Möglichkeiten.

Lösung: Korrekt ist nur (c), da:

(a) A_1 ist orthogonal.
Falsch, die zweite Spalte $A_1^{(2)}$ ist nicht normiert, da

$$\left|\left|A_1^{(2)}\right|\right| = \left|\left|\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{0^2+0^2} = \sqrt{0} = 0 \neq 1,$$

aber die Spalten $A_1^{(1)}$ und $A_1^{(2)}$ stehen orthogonal zueinander, weil

$$A_1^{(1)} \cdot A_1^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

(b) A_2 ist orthogonal.
Falsch, die Spalten $A_2^{(1)}$ und $A_2^{(2)}$ von

$$A_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

sind nicht orthogonal zueinander, da

$$A_2^{(1)} \cdot A_2^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5} + \frac{12}{5} = \frac{24}{5} \neq 0,$$

aber sie sind beide normiert, weil

$$\left\|A_2^{(1)}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1,$$
$$\left\|A_2^{(2)}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1.$$

✓ (c) Keine der beiden genannten Möglichkeiten.

15. Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$, so dass $A^T A$ die Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ ist. Dann gilt:

(a) A ist orthogonal und $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

Lösung: Korrekt ist nur (b), da:

(a) A ist orthogonal und $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
Falsch, denn die Matrix A ist keine quadratische Matrix (weil $m \neq n$), daher ist A nicht invertierbar und somit nicht orthogonal.

✓ (b) A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
Richtig, denn es gilt

$$\|A\,\mathbf{x}\| = \sqrt{(A\mathbf{x})^T A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbb{I}_n \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|,$$

weil $A^T A = \mathbb{I}_n$ ist.

(c) Sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.
Falsch, dies gilt nur, wenn $B^T B = \mathbb{I}_m$ ist, da dann

$$\begin{aligned} A^T A &= \mathbb{I}_n, \\ B^T B &= \mathbb{I}_m, \\ (BA)^T BA &= A^T B^T BA = A^T \mathbb{I}_m A = A^T A = \mathbb{I}_n, \\ (AB)^T AB &= B^T A^T AB = B^T \mathbb{I}_n B = B^T B = \mathbb{I}_m. \end{aligned}$$

Ein Gegenbeispiel:

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(diese* 3×2*-Matrix), dann gilt*

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$$

und mit $B := A^T$ *ist also* $BA = A^T A = \mathbb{I}_2$ *orthogonal, da* $\mathbb{I}_2$ *orthogonal ist, aber*

$$AB = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht orthogonal, weil dieses Matrixprodukt AB *nicht einmal invertierbar ist.*

Oder noch einfacher:

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(diese* 2×1*-Matrix), dann ist*

$A^T A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 = \mathbb{I}_1 =$ *die* 1×1*-Einheitsmatrix, welche natürlich orthogo*

und mit $B := A^T$ *ist* $BA = A^T A = \mathbb{I}_1$ *orthogonal, da* $\mathbb{I}_1$ *orthogonal ist, aber*

$$AB = AA^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht orthogonal, weil dieses Matrixprodukt AB *nicht einmal invertierbar ist.*

16. Gegeben sei die $n \times n$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 2 & 1 & & & \\ 3 & 1 & & * & \\ \vdots & \vdots & & & \\ n & 1 & & & \end{pmatrix},$$

wobei nur die ersten beiden Spalten bekannt sind. Angenommen es existiert eine LR-Zerlegung $A = LR$, was können Sie darüber aussagen?

(a) Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & \ldots & -n\end{pmatrix}^T$.

(b) Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3 & \ldots & -n\end{pmatrix}^T$.

(c) Die erste Spalte von L ist gleich der ersten Spalte von A.

(d) Man muss die gesamte Matrix A kennen, um die erste Spalte von L zu bestimmen.

(e) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 0.

(f) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 1.

(g) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 3.

(h) Man muss die gesamte Matrix A kennen, um den Eintrag r_{22} der Matrix R zu bestimmen.

Lösung: Korrekt ist nur (c), da:

(a) Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & \ldots & -n\end{pmatrix}^T$.

(b) Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3 & \ldots & -n\end{pmatrix}^T$.

✓ (c) Die erste Spalte von L ist gleich der ersten Spalte von A.
Richtig, die erste Spalte $L^{(1)}$ von L ist $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\end{pmatrix}^T$, da der oberste Eintrag a_{11} der gegebenen Matrix A gleich $a_{11} = 1$ ist.

(d) Man muss die gesamte Matrix A kennen, um die erste Spalte von L zu bestimmen.

(e) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 0.

(f) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 1.

(g) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 3.

(h) Man muss die gesamte Matrix A kennen, um den Eintrag r_{22} der Matrix R zu bestimmen.

Der erste Schritt um die LR-Zerlegung von A zu berechnen ist

$$\begin{array}{c|ccc|} \hline & 1 & 1 & \\ \mathbf{2} & 2 & 1 & \\ \mathbf{3} & 3 & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{n} & n & 1 & \\ \hline \end{array} \xrightarrow[m=2,3,4,\ldots,n]{m.Z-m\times(1.Z)} \begin{array}{c|ccc|} \hline & 1 & 1 & \\ & 0 & -\mathbf{1} & \\ * & 0 & -2 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ * & 0 & 1-n & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \quad \cdots,$$

woraus man die erste Spalte $L^{(1)}$ von L zu

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}^T \quad \text{(die fettgedruckten Manipulationen mit einer Eins als 1. Eintrag)}$$

und den Eintrag $r_{22} = -1$ von R ablesen kann (fettgedruckter Eintrag oben).