Lösung Serie 9

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 3. Dezember um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01.

1. Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1?$$

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(b) Für kein $x \in \mathbb{R}$.

(c) Für $x = 0$.

(d) Für $x = 2$.

(e) Für $x = 4$.

Lösung: Korrekt sind (c) und (d), da:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(b) Für kein $x \in \mathbb{R}$.

✓ (c) Für $x = 0$.

✓ (d) Für $x = 2$.

(e) Für $x = 4$.

Man berechnet mit der rekursiven Definition der Determinante, dass

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (x^2 - 1) + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot (x - 1) + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot (1 - x) \\
&= (x^2 - 1) - (x - 1) + (1 - x) \\
&= x^2 - 1 - x + 1 + 1 - x \\
&= x^2 - 2x + 1.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die obige Determinante nach der ersten Zeile entwickelt.
Das Polynom $x^2 - 2x + 1$ ist nur für $x = x_1 = 0$ oder $x = x_2 = 2$ gleich 1, da

$$x^2 - 2x + 1 = 1 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = x_1 = 0 \;\text{ oder }\; x = x_2 = 2.$$

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0.4 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A, d.h. eine Linksdreiecksmatrix L, eine Rechtsdreiecksmatrix R und eine Permutationsmatrix P, für welche $PA = LR$ gilt.

(b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i,\;\; i = 1, 2$, mit Hilfe von (a) für

$$b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 1.75 \\ 4.5 \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Matlab.

(d) Lösen Sie die beiden linearen Gleichungssysteme aus (b) mit Matlab.

Lösung: Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0.4 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & \frac{2}{5} & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 1.75 \\ 4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Wir berechnen

$$\begin{array}{r} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{array} \begin{array}{|ccc|ccc|}\hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 6 \\ \hline \end{array} \xrightarrow[3.Z\underline{+\mathbf{\frac{4}{5}}}\times(1.Z)]{2.Z\underline{-\mathbf{\frac{2}{5}}}\times(1.Z)} \begin{array}{r} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{array} \begin{array}{|ccc|ccc|}\hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ \hline \end{array}$$

$$\xrightarrow{2.Z\leftrightarrow 3.Z} \begin{array}{r} \\ -\mathbf{\frac{4}{5}} \\ \mathbf{\frac{2}{5}} \end{array} \begin{array}{|ccc|ccc|}\hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{3.Z\underline{+\mathbf{0}}\times(2.Z)} \begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{0} \end{array} \begin{array}{|ccc|ccc|}\hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \hline \end{array} \quad (*).$$

Daraus folgt, dass

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(aus den fettgedruckten Manipulationen mit Einsen auf der Diagonalen)},$$

und

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \text{(aus der rechten Seite von } (*)\text{)},$$

mit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(aus der linken Seite von } (*)\text{)}.$$

(b) Ähnlich wie in Serie 7, Aufgabe 2(b) gilt für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} Ax = b_i \iff PA = Pb_i \implies PAx = LRx = L(Rx) = Pb_i \\ \iff x = R^{-1}(L^{-1}Pb_i) = \underbrace{R^{-1} \quad \underbrace{(L^{-1}Pb_i)}_{=\text{Lösung } y \text{ von } Ly = Pb_i}}_{=\text{Lösung } x \text{ von } Rx = L^{-1}Pb_i = y} \quad . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wiederum das folgende immer gleiche Lösungsverfahren mit zwei Schritten (i) und (ii):

(1) Es sei $b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

(i) Zuerst lösen wir die lineare Gleichung $Lc = Pb_1$:
In Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{=c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -\frac{4}{5}c_1 + c_2 \\ \frac{2}{5}c_1 + c_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=b_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} c_1 &= 7 \quad \text{(1. Zeile)}, \\ -\frac{4}{5}c_1 + c_2 &= -2 \implies c_2 = -2 + \frac{4}{5}c_1 = -2 + \frac{4}{5} \cdot 7 = -\frac{10}{5} + \frac{28}{5} = \frac{18}{5} \implies c_2 = \frac{18}{5} \quad \text{(2. Zeile)}, \\ \frac{2}{5}c_1 + c_3 &= 3 \implies c_3 = 3 - \frac{2}{5}c_1 = 3 - \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{15}{5} - \frac{14}{5} = \frac{1}{5} \implies c_3 = \frac{1}{5} \quad \text{(3. Zeile)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{18}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Nun lösen wir die lineare Gleichung $Rx = c$:
In Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{=R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{=x} = \begin{pmatrix} 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 \\ \frac{1}{5}x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ \frac{18}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{=c}.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5} \Longrightarrow x_3 = 1 \quad (3.\ \text{Zeile}),$$
$$\frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 = \frac{18}{5} \quad (2.\ \text{Zeile})$$
$$\Longrightarrow x_2 = \frac{5}{4}\left(\frac{18}{5} - \frac{38}{5}x_3\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{18}{5} - \frac{38}{5}\right) = \frac{5}{4} \cdot \underbrace{\left(-\frac{20}{5}\right)}_{=-4} = -5 \Longrightarrow x_2 = -5,$$
$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \quad (1.\ \text{Zeile})$$
$$\Longrightarrow x_1 = \frac{1}{5}(7 - 2x_3 - x_2) = \frac{1}{5}(7 - 2 \cdot 1 - (-5)) = \frac{1}{5}(7 - 2 + 5) = \frac{10}{5} = 2$$
$$\Longrightarrow x_1 = 2.$$

Wir erhalten deshalb schlussendlich für die Lösung $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ der linearen Gleichung $Ax = b_1$, den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Es sei nun $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3.75 \\ 1.75 \\ 4.5 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{9}{2} \end{smallmatrix}\right)$.

(i) Zuerst lösen wir wieder die lineare Gleichung $Lc = Pb_2$:
In Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{=c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -\frac{4}{5}c_1 + c_2 \\ \frac{2}{5}c_1 + c_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}}_{=b_2} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass

$$c_1 = \frac{15}{4} \quad \text{(1. Zeile)},$$

$$-\frac{4}{5}c_1 + c_2 = \frac{9}{2} \Longrightarrow c_2 = \frac{9}{2} + \frac{4}{5}c_1 = \frac{9}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{9}{2} + 3 = \frac{9}{2} + \frac{6}{2} = \frac{15}{2} \Longrightarrow c_2 = \frac{15}{2} \quad \text{(2. Zeile)},$$

$$\frac{2}{5}c_1 + c_3 = \frac{7}{4} \Longrightarrow c_3 = \frac{7}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{7}{4} - \frac{6}{4} = \frac{1}{4} \Longrightarrow c_3 = \frac{1}{4} \quad \text{(3. Zeile)}.$$

Wir erhalten daher

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{15}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 7.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

(ii) Danach lösen wir wiederum die lineare Gleichung $Rx = c$:
In Matrixschreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{=R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{=x} = \begin{pmatrix} 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 \\ \frac{1}{5}x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{15}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{=c}.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{4} \Longrightarrow x_3 = \frac{5}{4} \quad \text{(3. Zeile)},$$

$$\frac{4}{5}x_2 + \frac{38}{5}x_3 = \frac{15}{2} \quad \text{(2. Zeile)}$$

$$\Longrightarrow x_2 = \frac{5}{4}\left(\frac{15}{2} - \frac{38}{5}x_3\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{15}{2} - \frac{38}{5} \cdot \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{15}{2} - \frac{19}{2}\right) = \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{4}{2}\right) = -\frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow x_2 = -\frac{5}{2},$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = \frac{15}{4} \quad \text{(1. Zeile)}$$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{1}{5}\left(\frac{15}{4} - 2x_3 - x_2\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{15}{4} - 2 \cdot \frac{5}{4} - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{15}{4} - \frac{10}{4} + \frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{15}{4} - \frac{10}{4} + \frac{10}{4}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{3}{4}.$$

Wir erhalten deshalb schlussendlich für die Lösung $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ der linearen Gleichung $Ax = b_2$, den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -2.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir haben das folgende MATLAB-Skript:

```
A=[5 1 2; 2 0.4 1; -4 0 6];
[L,R,P]=lu(A)
```

(d) Wir haben das folgende MATLAB-Skript:

```
A=[5 1 2; 2 0.4 1; -4 0 6];
b1=[7 3 -2]';
b2=[3.75 1.75 4.5]';
[L,R,P]=lu(A);
c1=L\(P*b1);
x1=R\c1
c2=L\(P*b2);
x2=R\c2
```

3. Berechnen Sie die Determinanten der zwei Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} \det(M) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} &\overset{1.Z \leftrightarrow 3.Z}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\underset{3.Z-2\times(1.Z)}{\overset{2.Z-3\times(1.Z)}{=}} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{3.Z-2.Z}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 4 = 4. \end{aligned}$$

Dabei haben wir zuerst die erste Zeile und die dritte Zeile vertauscht (daher kommt das negative Vorzeichen) und danach auf die so entstandene Matrix den Gauss-Algorithmus angewandt, was die Determinante unverändert lässt. Auch haben wir verwendet, dass die

Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonaleinträge ist, also

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{33} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & a_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}.$$

Alternativ kann man auch (zum Beispiel) nach der 1. Zeile entwickeln und erhält

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (4-1) - 1 \cdot (6-1) + 3 \cdot (3-2) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 6 - 5 + 3 = 4. \end{aligned}$$

Es ist

$$\det(N) = 0,$$

da die zweite Zeile die Summe der ersten Zeile und der dritten Zeile ist, weil

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

In so einem Fall, wo Zeilen oder Spalten einer Matrix A linear abhängig sind, gilt immer $\det(A) = 0$ und die Matrix A ist somit nicht invertierbar.
Alternativ kann man auch (zum Beispiel) nach der 3. Spalte entwickeln, da diese am meisten Nullen hat, und erhält

$$\begin{aligned} \det(N) &= \det\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=2} + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=2} + (-1)^{3+3} \cdot 0 + (-1)^{4+3} \cdot 0 \\ &= (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 2 + 0 + 0 \\ &= -2 - (-2) \\ &= -2 + 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

In der obigen Rechnung haben wir benutzt, dass

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 0 \\
&= (-1)^2\cdot 2\cdot((-2)\cdot 2 - 2\cdot 1) + (-1)^3\cdot 1\cdot((-2)\cdot 2 - 2\cdot 5) + 0 \\
&= 2\cdot(-4-2) - 1\cdot(-4-10) \\
&= 2\cdot(-6) - (-14) \\
&= -12 + 14 \\
&= 2,
\end{aligned}$$

wobei wir (zum Beispiel) nach der 1. Zeile entwickelt haben, da diese eine Null beinhaltet und auch sonst die "kleinsten" Zahlen hat. Ebenfalls nutzten wir, dass

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot 4\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+3}\cdot(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^2\cdot 4\cdot((-2)\cdot 2 - 2\cdot 1) + (-1)^3\cdot 3\cdot((-2)\cdot 2 - 2\cdot 5) \\
&\quad + (-1)^4\cdot(-2)\cdot((-2)\cdot 1 - (-2)\cdot 5) \\
&= 4\cdot(-4-2) - 3\cdot(-4-10) + (-2)\cdot(-2-(-10)) \\
&= 4\cdot(-6) - 3\cdot(-14) + (-2)\cdot(-2+10) \\
&= -24 + 42 + (-2)\cdot 8 \\
&= -24 + 42 - 16 \\
&= 2,
\end{aligned}$$

wobei wir hier (zum Beispiel) nach der 1. Zeile entwickelt haben.

4. Betrachten Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie mit Matlab die Determinante $\det(M)$ von M.

(b) Geben Sie allgemein an, welche Werte für die Determinante einer orthogonalen Matrix überhaupt in Frage kommen. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Von Hand berechnen wir (zum Beispiel) mittels einer Entwicklung nach der 1. Zeile, da diese eine Null beinhaltet, dass

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
&= -\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Mit MATLAB berechnen wir $\det(M) = -1$ mit dem folgenden Skript:

```
M=[sqrt(3)/2  1/2  0;
    -1/(2*sqrt(2))  sqrt(3)/(2*sqrt(2))  1/sqrt(2);
    -1/(2*sqrt(2))  sqrt(3)/(2*sqrt(2))  -1/sqrt(2)]
 det(M)
```

(b) Allgemein gilt: Eine $n \times n$-Matrix M ist orthogonal, falls

$$M^T M = \mathbb{I}_n.$$

Aus

$$\det(M^T M) = \det(M^T) \cdot \det(M) = \det(M) \cdot \det(M) = (\det(M))^2,$$

wobei wir die allgemein gültige Regel $\det(M^T) = \det(M)$ verwendet haben, folgt für M orthogonal:

$$(\det(M))^2 = \det(M^T M) = \det(\mathbb{I}_n) = 1.$$

Und daraus folgt wiederum

$$(\det(M))^2 = 1 \Longrightarrow \det(M) = \pm 1.$$

Somit kann für eine orthogonale Matrix M nur gelten: $\det(M) = 1$ oder $\det(M) = -1$. Beides kommt tatsächlich auch vor, da zum Beispiel

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{I}_n) = 1 \quad & \text{mit } M := \mathbb{I}_n \text{ orthogonal, da } \mathbb{I}_n^T \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n, \\ \det(-\mathbb{I}_n) = -1 \quad & \text{mit } M := -\mathbb{I}_n \text{ orthogonal, da } (-\mathbb{I}_n)^T \cdot (-\mathbb{I}_n) = (-\mathbb{I}_n) \cdot (-\mathbb{I}_n) \\ & \qquad = (-1) \cdot (-1) \cdot \mathbb{I}_n \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

5. (Ohne Abgabe) *Illustration zu Drehungen im* $\mathbb{R}^2$
Downloaden und entpacken Sie das zip-Archiv
https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0171-00L/sc/LinAlgSerie9Aufgabe5.zip
und führen Sie das Skript rotateeth aus. Sobald die erste Figur erscheint, kann durch dreimaliges betätigen einer beliebigen Taste das ganze Skript ausgeführt werden. Schauen Sie sich den Code an, um zu verstehen, was geschieht.

Lösung: Wird vom zip-Archiv Skript rotateeth auf
https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0171-00L/sc/LinAlgSerie9Aufgabe5.zip
gemäss den obigen Anweisungen generiert.