Lösung Semesterendtest

Aufgabe 1 ist online auf https://echo.ethz.ch zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, 8. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per SAM-Upload Tool https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01.

1. Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Für welche beiden reellen Zahlen x_1 und x_2 gilt $B = A^{-1}$?

(a) $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$.

(b) $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

(c) $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

(d) $x_1 = -1$ und $x_2 = -1$.

Lösung: Korrekt ist nur (c), da:

(a) $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$.

(b) $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

✓ (c) $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

(d) $x_1 = -1$ und $x_2 = -1$.

Das Produkt

$$AB = \mathbb{I}_3 = (\delta_{ij})_{1\le i,j\le 3} \quad \text{mit} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

muss gleich der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_3$ sein. Unter anderem muss also $\delta_{11} = 1$ sein. Dieser Eintrag ist das Produkt der ersten Zeile von A mit der ersten Spalte von B, also

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2x_1 + 1 - 2 = 2x_1 - 1 = 1 = \delta_{11}.$$

Daraus folgt $x_1 = 1$. Genauso folgern wir, dass $\delta_{33} = 1$. Das Produkt der dritten Zeile von A mit der dritten Spalte von B liefert dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 + 1 - x_2 = -x_2 = 1 = \delta_{33}$$

und daraus folgt, dass $x_2 = -1$.
Für die Probe multipliziert man die beiden Matrizen mit $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ und erhält als Produkt

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1-2 & 0+1-1 & -2+1+1 \\ -3-1+4 & 0-1+2 & 3-1-2 \\ 1+1-2 & 0+1-1 & -1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_3.$$

2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A := \left(a^{(1)} \dots a^{(i)} \dots a^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ mit Spaltenvektoren } a^{(i)} \in \mathbb{R}^m \text{ für } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

und

$$b \in \mathbb{R}^m \text{ mit } b \notin \operatorname{span}\left\{a^{(1)}, \dots, a^{(i)}, \dots, a^{(n)}\right\}.$$

Dann existiert keine Lösung x zum Gleichungssystem $Ax = b$.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

Lösung: Korrekt ist (a), da:

✓ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Wenn $x = (x_1, ..., x_n)^T$ Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist, dann ist

$$x_1 a^{(1)} + ... + x_i a^{(i)} + ... + x_n a^{(n)} = b.$$

Um b als solche Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, ..., a^{(i)}, ..., a^{(n)}$ darzustellen, muss aber

$$b \in \operatorname{span}\left\{a^{(1)}, ..., a^{(i)}, ..., a^{(n)}\right\}$$

gelten.

3. Es sei die 3×4-Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist eine Basis β des Unterraums $\ker(A) = \{x \mid Ax = 0\}$ gegeben durch ...

(a) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(b) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(c) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(d) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Lösung: Korrekt ist nur (a), da:

✓ (a) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(b) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(c) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(d) $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Mit dem Gaussverfahren erhält man aus der Matrix A die folgende Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3.Z-2.Z]{2\times(2.Z)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3.Z-1.Z]{2.Z-1.Z} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher sind die Lösungen des Gleichungssystems $Ax = 0$ durch

$$x_2 = -x_3 - 2x_4$$
$$x_1 = \frac{1}{2}(x_3 - x_2 - 2x_4) = \frac{1}{2}(x_3 - (-x_3 - 2x_4) - 2x_4) = \frac{1}{2}(x_3 + (x_3 + 2x_4) - 2x_4) = x_3$$

gegeben, wobei $x_3 \in \mathbb{R}$ und $x_4 \in \mathbb{R}$ freie Parameter sind. Der Kern von A hat somit die Dimension 2.
Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ und $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, sind Lösungen von $Ax = 0$ und linear unabhängig, da der zweite kein Vielfaches vom ersten ist. Sie bilden daher eine Basis vom Kern von A.
Die zweite Antwort ist falsch, weil jede Basis vom Kern von A genau zwei Elemente hat.
Die dritte Antwort ist falsch, weil Vektoren im $\mathbb{R}^3$ nicht im Kern von A liegen können, sondern nur Vektoren im $\mathbb{R}^4$.
Die vierte Antwort ist falsch, weil $(1, 0, -1, 0)^\top$ keine Lösung von $Ax = 0$ ist.

4. Welche der folgenden drei Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind jeweils linear unabhängig?

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(c) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung: Korrekt sind alle (a), (b) und (c), da:

✓ (a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

✓ (b) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

✓ (c) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Über die lineare Unabhängigkeit von drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ drei entscheidet die Determinante der 3×3-Matrix, deren Spaltenvektoren die gegebenen Vektoren sind. Verschwindet diese nicht, sind die Vektoren linear unabhängig. Es ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + 0 + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 6 + 0 = 6 \neq 0.$$

Da es sich bei den weiteren Antwortalternativen nur um Vertauschungen der drei Vektoren v_1, v_2 und v_3 handelt, ändert sich die Determinante nur bis auf ein Vorzeichen,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -6 \neq 0 \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

verschwindet also nicht. Damit sind in allen Antworten (a), (b) und (c) die zugehörigen drei Vektoren v_1, v_2 und v_3 jeweils linear unabhängig. Ausserdem ist die lineare Unabhängigkeit von Vektoren v_1, v_2, v_3, ..., v_n sowieso unabhängig von ihrer Reihenfolge.

5. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{F} := F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in der Variablen x mit der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \ \text{ für alle } f, g \in \mathcal{F}$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \ \text{ für alle } f \in \mathcal{F} \text{ und alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Darin enthalten sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Unterräume

$$\mathcal{P}_n(x) := \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

der Polynome mit Grad $\leq n$ in der Variablen x.
Es gilt:

(a) Die Dimension des Unterraums $\mathcal{P}_n(x)$ ist $n+1$.

(b) Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Element von $\mathcal{F}$, das heisst $\sin(x) \in \mathcal{F}$, aber liegt in keinem der Unterräume $\mathcal{P}_n(x)$, was heisst, dass $\sin(x) \notin \mathcal{P}_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Die Sinusfunktion $\sin(x)$ und die Cosinusfunktion $\cos(x)$ sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

(d) $1, \sin^2(x), \cos^2(x)$ sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.

(e) Sind zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ linear unabhängig, so sind auch die Polynome $xp(x)$ und $xq(x)$ linear unabhängig.

(f) Der Untervektorraum $V = \operatorname{span}\{\sin(x)\}$ schneidet den Unterraum $\mathcal{P}_3(x)$ nur in 0, oder formal

$$V \cap \mathcal{P}_3(x) = \{0\}$$

und es gilt

$$\dim\left(\operatorname{span}\{\sin(x), 1, x, x^2, x^3\}\right) = 5.$$

(g) Die Abbildung $A\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$ ist linear.

Lösung: Korrekt sind (a), (b), (d), (e), (f) und (g), da:

✓ (a) Die Dimension des Unterraums $\mathcal{P}_n(x)$ ist $n+1$.
Die Dimension ist höchstens $n+1$, denn die Polynome $1, x, x^2, \ldots, x^n$ erzeugen diesen Unterraum $\mathcal{P}_n(x)$. Diese $n+1$ Polynome sind aber auch linear unabhängig, wie wir gleich zeigen, und damit ist die Dimension auch mindestens $n+1$; zusammen ergibt dies

$$\dim(\mathcal{P}_n(x)) = n+1.$$

Nach der Definition von linear unabhängig ist zu zeigen, dass

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0 \ \ \forall x \ \ (*) \ \ \textit{impliziert} \ \ a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Für $x \to \infty$ konvergiert

$$\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{x^n} = a_n + \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}}{x^n} \quad \textit{gegen} \;\; a_n$$

und nach der Voraussetzung $(*)$ und der Formel

$$\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{x^n} = \frac{0}{x^n} = 0$$

auch gegen Null; also ist $a_n = 0$. Mittels Induktion und dem gleichen Argument wie oben folgt nun, dass auch $a_{n-1} = 0$ und auch alle anderen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ verschwinden.

✓ (b) Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Element von $\mathcal{F}$, das heisst $\sin(x) \in \mathcal{F}$, aber liegt in keinem der Unterräume $\mathcal{P}_n(x)$, was heisst, dass $\sin(x) \notin \mathcal{P}_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Richtig. Es ist klar, dass $\sin(x) \in \mathcal{F}$, denn Sinus ist eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Allerdings ist Sinus nicht als Polynom schreibbar, da kein Polynom, ausser dem Nullpolynom, unendlich viele Nullstellen hat, also gilt $\sin(x) \notin \mathcal{P}_n(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Die Sinusfunktion $\sin(x)$ und die Cosinusfunktion $\cos(x)$ sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.
Falsch, denn aus

$$\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) \equiv 0$$

folgt durch auswerten an der Stelle $x := 0$

$$\lambda \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \mu \underbrace{\cos(0)}_{=1} = \mu = 0$$

und durch auswerten an der Stelle $x := \frac{\pi}{2}$ genauso

$$\lambda \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} + \mu \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = \lambda = 0.$$

Damit haben wir aber gerade gezeigt, dass die beiden Vektoren $\sin(x)$ und $\cos(x)$ linear unabhängig sind, da

$$\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \;\; \textit{und} \;\; \mu = 0.$$

✓ (d) $1, \sin^2(x), \cos^2(x)$ sind linear abhängige Vektoren in $\mathcal{F}$.
Genau, denn nach dem trigonometrischen Pythagoras Satz gilt

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) \equiv 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R},$$

was bedeutet, dass sich 1 als Linearkombination von $\sin^2(x)$ und $\cos^2(x)$ schreiben lässt.

✓ (e) Sind zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ linear unabhängig, so sind auch die Polynome $xp(x)$ und $xq(x)$ linear unabhängig.
Richtig, denn

$$\lambda \cdot xp(x) + \mu \cdot xq(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

impliziert, mittels Division durch x, dass auch

$$\lambda p(x) + \mu q(x) = 0 \ \ \forall x \neq 0.$$

Also hat das Polynom $\lambda p(x) + \mu q(x)$ unendlich viele Nullstellen und muss damit das Nullpolynom sein, also

$$\lambda p(x) + \mu q(x) \equiv 0.$$

Nach Voraussetzung hat diese Gleichung nur die triviale Lösung $\lambda = \mu = 0$ und wir haben gezeigt, dass auch $xp(x)$ und $xq(x)$ linear unabhängig sind.

✓ (f) Der Untervektorraum $V = \text{span}\{\sin(x)\}$ schneidet den Unterraum $\mathcal{P}_3(x)$ nur in 0, oder formal

$$V \cap \mathcal{P}_3(x) = \{0\}$$

und es gilt

$$\dim\left(\text{span}\{\sin(x), 1, x, x^2, x^3\}\right) = 5.$$

Ein Element von V ist von der Form

$$\lambda \sin(x) \ \ \textit{für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wie in (b) folgert man, dass sich diese Funktion nur für $\lambda = 0$ als Polynom schreiben lässt, da sonst mittels Division durch λ auch $\sin(x)$ als Polynom geschrieben werden könnte. Damit haben V und $\mathcal{P}_3(x)$ nur den Nullvektor gemeinsam und es gilt

$$V \cap \mathcal{P}_3(x) = \{0\}.$$

Die zweite Aussage ist ebenfalls richtig, denn

$\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 x + \lambda_4 x^2 + \lambda_5 x^3 = 0 \ \ \forall x$ *impliziert* $\lambda_1 = 0$ *(folgt aus dem ersten Teil dieser A*

und

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

folgt dann wie in (a). Damit haben wir 5 linear unabhängige Vektoren, die also einen 5-dimensionalen Raum aufspannen und es gilt daher

$$\dim\left(\text{span}\{\sin(x), 1, x, x^2, x^3\}\right) = 5.$$

✓ (g) Die Abbildung $A\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$ ist linear.
Richtig, denn für alle $f, g \in \mathcal{F}$ gilt

$$A(\alpha f + \beta g) = [\alpha f + \beta g](1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = \alpha A(f) + \beta A(g).$$

6. Gegeben sei die 7×7-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) A ist orthogonal.

(b) A ist nicht orthogonal.

Lösung: Korrekt ist (a), da:

✓ (a) A ist orthogonal.

(b) A ist nicht orthogonal.

Offensichtlich sind alle Spalten von A normiert, da jede Spalte von A genau eine Eins und sonst nur Nullen beinhaltet. Zudem stehen die Spalten von A auch orthogonal zueinander, denn das Skalarprodukt zweier Spalten ist Null, da sich alle Einsen an verschiedenen Stellen befinden und daher ist das Produkt zweier Komponenten zweier verschiedener Spalten immer Null. Also ist die Matrix A orthogonal. Dies gilt auch für alle anderen $n \times n$-Permutationsmatrizen und die Matrix A ist eine solche.

7. Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$ und $\mathbb{I}_n$ die $n \times n$-Einheitsmatrix. Weiter seien A eine $n \times n$-Matrix, $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren und es gelte

$$A^2 = 2\mathbb{I}_n \text{ und } Au = v.$$

Dann folgt:

(a) Die Determinante $\det(A)$ von A ist entweder $-\sqrt{2^n}$ oder $\sqrt{2^n}$. Andere Werte für $\det(A)$ sind nicht möglich.

(b) Das lineare Gleichungssystem $Ax = u$ hat die Lösung $x = \frac{1}{2}v$.

Lösung: Korrekt sind (a) und (b), da:

✓ (a) Die Determinante $\det(A)$ von A ist entweder $-\sqrt{2^n}$ oder $\sqrt{2^n}$. Andere Werte für $\det(A)$ sind nicht möglich.
Richtig, aus

$$A^2 = 2\mathbb{I}_n$$

folgt

$$(\det(A))^2 = \det(A^2) = \det(2\mathbb{I}_n) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}}_{n\times n\text{-}Matrix} = 2^n.$$

Also erfüllt $\det(A)$ *die quadratische Gleichung* $(\det(A))^2 = 2^n$ *aus welcher folgt, dass*

$$\textit{entweder} \quad \det(A) = \sqrt{2^n} \quad \textit{oder} \quad \det(A) = -\sqrt{2^n}$$

und andere Werte für $\det(A)$ *sind nicht möglich.*

✓ (b) Das lineare Gleichungssystem $Ax = u$ hat die Lösung $x = \frac{1}{2}v$.
Richtig, aus $Au = v$ *folgt unter Anwendung von* A *auf beide Seiten dieser Gleichung, dass*

$$A^2u = Av$$

und mit $A^2 = 2\mathbb{I}_n$ *folgt* $A^2u = 2u$, *woraus wiederum folgt, dass*

$$2u = Av \quad \textit{oder} \quad u = A\underbrace{\left(\frac{1}{2}v\right)}_{=x}.$$

Somit gilt mit $x = \frac{1}{2}v$, *dass* $Ax = u$.

8. Bestimmen Sie die Determinante $\det(A)$ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $\det(A) = 0$.

(b) $\det(A) = -1$.

(c) $\det(A) = 2$.

Lösung: Korrekt ist nur (b), da:

(a) $\det(A) = 0$.

✓ (b) $\det(A) = -1$.

(c) $\det(A) = 2$.

Eine Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 + 0 \\ &= (-1) \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \\ &= -1.\end{aligned}$$

9. Gegeben seien zwei Matrizen A und B aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n > 1$.
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(b) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(c) Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spaltenvektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(i)}, \ldots, a^{(n)}$ von A linear unabhängig sind.

(d) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.

(e) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

(f) Es gilt $\det(A) = \det(A^T)$, wobei A^T die Transponierte von A bezeichnet.

(g) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Lösung: Korrekt sind (b), (c), (d), (f) und (g), da:

(a) Es gilt $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
Falsch. Ein Gegenbeispiel dazu ist

$$A = B = \mathbb{I}_n,$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A+B) &= \det(\mathbb{I}_n + \mathbb{I}_n) \\
&= \det(2\mathbb{I}_n) \\
&= \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \\
&= 2^n \\
&\neq 2 \\
&= 1 + 1 \\
&= \det(\mathbb{I}_n) + \det(\mathbb{I}_n) \\
&= \det(A) + \det(B).
\end{aligned}$$

✓ (b) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
Siehe "K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, vdf Hochschulverlag, 5. Auflage 2002", Satz 3.6 auf Seite 58.

✓ (c) Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spaltenvektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(i)}, \dots, a^{(n)}$ von A linear unabhängig sind.
Siehe "K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, vdf Hochschulverlag, 5. Auflage 2002", Korollar 3.12 auf Seite 63. Punkt i) ist äquivalent dazu, dass die Spaltenvektoren der $n \times n$-Matrix A linear unabhängig sind. Diese Aussage (c) wurde auch in der obigen Aufgabe 4 verwendet.

✓ (d) Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.
Richtig. Der Beweis mit Hilfe von Satz 3.6 in "K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, vdf Hochschulverlag, 5. Auflage 2002" auf Seite 58 lautet wie folgt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA).$$

Hier haben wir die obige Aussage (b) zweimal verwendet.

(e) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.
Nein, denn jedes Element in der Matrix A wird mit λ multipliziert. Ein Gegenbeispiel

zu (e) mit $\lambda := 2$ *und* $A := \mathbb{I}_n$ *ist zum Beispiel*

$$\begin{aligned}\det(2\mathbb{I}_n) &= \det\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\end{pmatrix}\\ &= 2^n\\ &\neq 2\\ &= 2\cdot\det(\mathbb{I}_n).\end{aligned}$$

Siehe auch den letzten Punkt (g).

✓ (f) Es gilt $\det(A) = \det(A^T)$, wobei A^T die Transponierte von A bezeichnet.
Siehe "K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, vdf Hochschulverlag, 5. Auflage 2002", Satz 3.3 auf der Seite 56 oder die Vorlesungsunterlagen der Woche 9.

✓ (g) Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
Jedes Element in A wird mit λ *multipliziert. Dabei kann man aus jeder Spalte von A einen Faktor* λ *aus der Determinante herausziehen mit Hilfe der Formel*

$$\det\left(a^{(1)},\dots,\lambda a^{(i)},\dots,a^{(n)}\right) = \lambda\det\left(a^{(1)},\dots,a^{(i)},\dots,a^{(n)}\right) \quad \forall i = 1,2,3,\dots,n$$

aus der Vorlesungswoche 9.
Da wir n Spalten haben, folgt die Aussage mit dem Faktor λ^n*.*