

# Basisprüfung

## Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Die Prüfung dauert **120 Minuten**.

Die Multiple Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie **1 Punkt**, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie **0 Punkte**.

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

---

1. Betrachte das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x - y + z &= 1 \\ -x - y + z &= -1 \\ -x - y &= 0. \end{aligned}$$

Es gilt:

- ✓ (a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.
- (b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.
- (c) Das lineare Gleichungssystem hat genau drei unterschiedliche Lösungen.
- (d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

**Bitte wenden!**

**2.** Es seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Welcher der folgenden Vektoren ergänzt  $v_1, v_2$  zu einer Basis des  $\mathbb{R}^3$ ?

(a)  $(-1, 0, 1)^t$ .

(b)  $(-1, 1, 2)^t$ .

(c)  $(1, 1, 0)^t$ .

✓ (d)  $(1, 1, 1)^t$ .

**3.** Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet der Eintrag  $a_{12}$  der Matrix  $A$ ?

(a)  $-1$ .

(b)  $1$ .

✓ (c)  $2$ .

(d)  $0$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

4. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Mengen ist *kein* Untervektorraum von  $\mathbb{R}^2$ ?

(a)  $\ker(A)$ .

(b)  $\operatorname{Im}(A)$ .

✓ (c)  $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ .

(d)  $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ .

5. Die  $3 \times 3$ -Matrix  $A$  erfülle  $A^2 = A$ . Für welche der folgenden Matrizen gilt *immer*  $B^2 = B$ ?

(a)  $B = \mathbb{I}_3 + A$ .

✓ (b)  $B = \mathbb{I}_3 - A$ .

(c)  $B = 2A$ .

(d)  $B = A + A^t$ .

**Bitte wenden!**

6. Es seien die Basen

$$\mathcal{B} = (4x, 2x^2 - 4x + 1, 3x^2 + 3x + 1) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = (x^2, x, 1)$$

von  $\mathcal{P}_2$  gegeben, wobei  $\mathcal{P}_2$  den reellen Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich zwei bezeichnet. Welche der folgenden Matrizen entspricht der Übergangsmatrix von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}'$ ?

✓ (a)  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

(b)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

(c)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

(d)  $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

7. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welcher der folgenden Vektoren liegt im Kern von  $A$ ?

✓ (a)  $(1, -1, 2, 5)^t.$

(b)  $(-1, -1, 2, 5)^t.$

(c)  $(1, -1, 2, -5)^t.$

(d)  $(1, -1, -2, 5)^t.$

**Siehe nächstes Blatt!**

8. Welcher der folgenden Vektoren liegt *nicht* im Bild der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}?$$

(a)  $(-4, 4, -2)^t$ .

✓ (b)  $(1, 1, 1)^t$ .

(c)  $(3, 1, 1)^t$ .

(d)  $(-1, 5, -1)^t$ .

9. Es sei eine Basis  $b_1, b_2, b_3$  von  $\mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne  $e_1, e_2, e_3$  die Orthonormalbasis, die man erhält wenn man das Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf  $b_1, b_2, b_3$  (in dieser Reihenfolge) anwendet. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a)  $e_3 = (1, 0, 0)^t$ .

✓ (b)  $e_3 = (0, 1, 0)^t$ .

(c)  $e_3 = (0, 0, 1)^t$ .

(d)  $e_3 = (0, 0, -1)^t$ .

**10.** Gegeben seien zwei orthonormale Vektoren  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ . Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

- ✓ (a) Die Vektoren  $u_1 - u_2$  und  $u_1 + u_2$  sind orthogonal.
- (b) Die Vektoren  $u_1$  und  $u_1 + u_2$  sind orthogonal.
- (c) Die Vektoren  $u_1 - u_2$  und  $u_2$  sind orthogonal.
- (d) Die Vektoren  $u_1 - 2u_2$  und  $u_1 + 2u_2$  sind orthogonal.

**11.** Es bezeichne  $\mathcal{P}_2$  den reellen Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich zwei. Die Abbildung  $F: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$  sei gegeben durch

$$p \mapsto p' \quad (\text{die Ableitung von } p).$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (a)  $\text{im}(F) = \mathcal{P}_2$ .
- (b)  $\ker(F) = \{0\}$ .
- (c)  $F$  ist bijektiv.
- ✓ (d)  $F$  ist linear.

**12.** Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Was ist  $\det(A)$ ?

(a)  $-1$ .

(b)  $0$ .

✓ (c)  $1$ .

(d)  $2$ .

**13.** Es sei  $A$  eine invertierbare  $3 \times 3$  Matrix mit reellen Einträgen. Es bezeichne  $A^t$  die Transponierte von  $A$ . Welche der folgenden Aussagen ist *immer* korrekt?

(a) Die Matrix  $A - A^t$  ist invertierbar.

✓ (b) Die Matrix  $A^t$  ist invertierbar.

(c) Die Matrix  $A + \mathbb{I}_3$  ist invertierbar.

(d) Die Matrix  $A + A^t$  ist invertierbar.

14. Es sei

$$U := \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} : A^t = -A\}$$

der Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$  bestehend aus den schiefsymmetrischen Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- (a)  $\dim(U) = 10$ .
- ✓ (b)  $\dim(U) = 6$ .
- (c)  $\dim(U) = 12$ .
- (d)  $\dim(U) = 3$ .

15. Betrachte folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 - y_2 - y_3 \\y_2' &= -y_1 + 2y_2 - y_3 \\y_3' &= -y_1 - y_2 + 2y_3.\end{aligned}$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum des obigen Differentialgleichungssystems?

- (a) 0.
- (b) 1.
- (c) 2.
- ✓ (d) 3.

**16.** Die Abbildung  $\|\cdot\|_\infty: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \max_{i=1,2,3} |x_i|$$

ist eine Norm auf  $\mathbb{R}^3$ . Was ist

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|_\infty ?$$

(a)  $-5$ .

✓ (b)  $5$ .

(c)  $9$ .

(d)  $4$ .

**17.** Es sei  $A$  eine reelle  $3 \times 3$ -Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist *immer* korrekt?

(a)  $\det(A) = \det(-A^t)$ .

(b)  $\det(-A) = \det(A)$ .

(c)  $\det(A + A^t) = \det(A) + \det(A^t)$ .

✓ (d)  $\det(A - A^t) = \det(A) - \det(A^t)$ .

18. Wir definieren die Menge

$$M := \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A^t = A \text{ und } A^3 = \mathbb{I}_3\}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (a) Die Menge  $M$  enthält unendlich viele Elemente.
- (b) Die Menge  $M$  enthält keine Elemente.
- ✓ (c) Die Menge  $M$  enthält genau ein Element.
- (d) Die Menge  $M$  enthält genau zwei Elemente.

Hinweis: Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.

19. Es sei  $A$  eine reelle  $5 \times 5$ -Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist *immer* richtig?

- (a) Die Matrix  $A$  ist diagonalisierbar.
- ✓ (b) Die Matrizen  $A$  und  $A^t$  haben denselben Rang.
- (c) Die Matrizen  $A$  und  $A^t$  haben dasselbe Bild.
- (d) Die Matrizen  $A$  und  $A^t$  haben denselben Kern.

20. Es seien  $A$  und  $B$  zwei ähnliche Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- (a) Falls  $A = 0$ , dann gilt  $B = 0$ .
- (b) Falls  $A^3 = \mathbb{I}$  ist, dann gilt ebenfalls  $B^3 = \mathbb{I}$ .
- (c) Falls  $\det(A) = 1$ , dann gilt  $\det(B) = 1$ .
- ✓ (d) Falls  $A$  eine Diagonalmatrix ist, dann ist  $B$  ebenfalls eine Diagonalmatrix.

**Siehe nächstes Blatt!**

**21.** Es sei der Unterraum  $U \subset \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

- (a) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie eine Basis von  $U$ .
- (b) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von  $U$ .
- (c) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von  $b := (1, -1, 0)^t$  auf  $U$ .
- (d) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von  $b := (1, -1, -1)^t$  auf  $U$ .

Begründung:

- (a) Eine mögliche Basis ist:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren sind linear unabhängig, weil der letzte Eintrag von  $v_2$  gleich Null ist und der letzte Eintrag von  $v_1$  ungleich Null ist. Somit müssen die Vektoren linear unabhängig sein. Der Vektor  $(1, 1, 1)^t$  liegt nicht in  $U$ , also ist  $U$  höchstens zwei-dimensional. Deshalb sind die linear unabhängigen Vektoren  $v_1$  und  $v_2$  ein Erzeugendensystem von  $U$  und somit eine Basis von  $U$ .

- (b) Mittels Gram-Schmidt angewandt auf die obige Basis erhält man:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

- (c) Der Vektor  $b = (1, -1, 0)^t$  liegt bereits in  $U$ , also gilt  $Pb = (1, -1, 0)^t = b$ , wobei  $P$  die Orthogonalprojektion auf  $U$  bezeichnet.

- (d) Wir berechnen

$$Pb = \langle u_1, b \rangle u_1 + \langle u_2, b \rangle u_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**22.** Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung  $y' = Ay$  wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) **(4 Punkte)** Berechnen Sie das charakteristische Polynom  $p_A(\lambda)$  der Matrix  $A$  und die Eigenwerte von  $A$ .
- (b) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems  $y' = Ay$ .
- (c) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen  $y(0)$ , für welche die zugehörige Lösung  $y(t)$  gegen Null strebt für  $t \rightarrow +\infty$ .

Begründung:

- (a) Mittels der Regel von Sarrus erhält man

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4.$$

Es gilt somit  $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = -(-2 + \lambda)^2(1 + \lambda)$ . Also sind die Eigenwerte von  $A$  gleich  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  und  $\lambda_3 = -1$ .

- (b) Es bezeichnen  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  mit  $Av_i = \lambda_i v_i$  Eigenvektoren von  $A$ . Eine Möglichkeit ist

$$T = [v_1 \mid v_2 \mid v_3] = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels der Substitution  $Tz = y$  erhält man die allgemeine Lösung

$$y(t) = C_1 e^{2t} v_1 + C_2 e^{2t} v_2 + C_3 e^{-t} v_3. \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}).$$

- (c) Damit  $y(t)$  gegen Null strebt mit  $t \rightarrow +\infty$  muss gelten, dass  $C_1 = C_2 = 0$ , also

$$y(0) = C_3 v_3.$$

Die Menge aller Anfangsbedingungen, so dass  $y(t) \rightarrow 0$  mit  $t \rightarrow +\infty$  ist gegeben durch:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

**23.** Es bezeichne  $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  die quadratische Form

$$q(x) = x_1^2 - 2\sqrt{6}x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3^2, \quad \text{wobei } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) (**2 Punkte**) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix  $A$ , so dass  $q(x) = x^t A x$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- (b) (**5 Punkte**) Eine Quadrik  $Q$  ist gegeben durch  $q(x) = 1$ . Führen Sie die Hauptachsentransformation  $x = Ty$  durch und geben Sie die Normalform von  $Q$  an.
- (c) (**3 Punkte**) Skizzieren Sie die Quadrik  $Q$  im  $y$ -Koordinatensystem und berechnen Sie die Schnittpunkte der  $y$ -Koordinatenachsen mit der Quadrik  $Q$ .

Begründung:

- (a) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} & 0 \\ -\sqrt{6} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

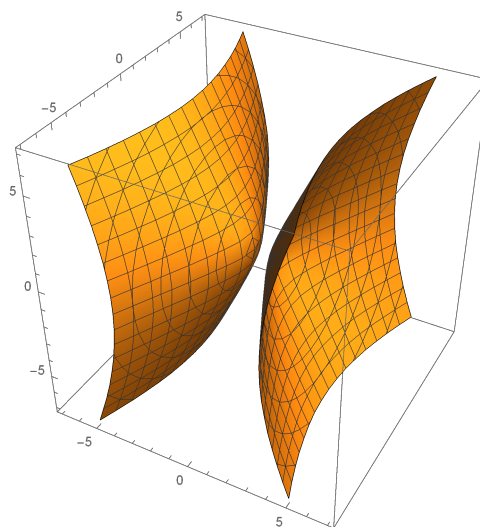
- (b) Die Eigenwerte von  $A$  sind  $\lambda_1 = 4$  und  $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ . Eine mögliche Wahl von  $T$  ist

$$T = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die  $i$ -te Spalte ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_i$  ist. Wichtig ist, dass die Matrix  $T$  orthogonal gewählt wird. Also  $T^t = T^{-1}$ . Die Normalform von  $Q$  lautet

$$4y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1.$$

- (c) Es handelt sich um ein zweischaliges Hyperboloid:



**Bitte wenden!**

Für die Schnittpunkte mit der  $y_1$ -Achse muss gelten  $1 = 4y_1^1$ , also  $(-\frac{1}{2}, 0, 0)^t$  und  $(\frac{1}{2}, 0, 0)^t$  sind die Schnittpunkte mit der  $y_1$ -Achse. Für die Schnittpunkte mit der  $y_2$  müsste gelten  $-y_2^2 = 1$ , dies ist nicht möglich, also gibt es keine Schnittpunkte mit der  $y_2$ -Achse. Das Analoge gilt für die  $y_3$ -Achse.

**Siehe nächstes Blatt!**

